

SUR LA FONCTION D'ONDE
DU PROBLÈME A TROIS CORPS
UNIDIMENSIONNEL
AVEC INTERACTION DE CONTACT

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par

ROLAND KESSI

Physicien diplômé



Digitized by the Internet Archive
in 2026

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

SUR LA FONCTION D'ONDE
DU PROBLÈME A TROIS CORPS
UNIDIMENSIONNEL
AVEC INTERACTION DE CONTACT

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par

ROLAND KESSI

Physicien diplômé

Février 1973

Lang Druck S.A., Liebefeld/Bern

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de Messieurs les professeurs P. Huguenin, J.P. Amiet et A. Robert autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 10 mai 1973

Le doyen: A. Jacot-Guillarmod

In eighteenth-century Newtonian mechanics, the three-body problem was insoluble. With the birth of general relativity around 1910 and quantum electrodynamics in 1930, two- and one-body problems became insoluble. And within modern field theory, the problem of zero bodies (vacuum) is insoluble. So, if we are out after exact solutions, no bodies at all is already too many.

R. D. Mattuck in A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem, 1967

Table des matières.

Introduction	1
Ch. 1 Les différentes équations du problème à trois corps	3
1.1 L'équation de Schrödinger	3
1.2 Ondes asymptotiques et canaux de diffusion	7
1.3 Les équations de Lippmann - Schwinger	9
1.4 Les équations de Faddeev	13
1.5 Forme différentielle des équations de Faddeev	18
Ch. 2 Particules identiques et symétries	21
2.1 L'espace des états et le groupe des permutations	21
2.2 Application au cas de trois particules identiques	29
Ch. 3 Solutions particulières	33
3.1 Les équations de Faddeev	33
3.2 Formes asymptotiques des solutions	40
3.3 Solution du problème de trois masses et de trois potentiels égaux	54
3.4 Remarques sur le cas général	61
3.5 Un cas particulier d'état lié	61

Ch. 4	Matrice S	65
4.1	Trois particules discernables	66
4.2	Trois bosons identiques	73
4.3	Trois fermions identiques	73
4.4	Deux particules identiques	74
	En guise de conclusion	78

Appendices

A	Transformation de coordonnées	79
B	Le problème à deux corps avec potentiel δ	82
C	Rappel de théorie de la diffusion	88
	Bibliographie	100

Introduction.

Il y a maintenant plus de dix ans que le problème de la diffusion de trois corps est résolu en mécanique quantique. Mais si l'on sait écrire des équations ayant une solution unique pour la fonction d'onde ou pour l'opérateur de diffusion, on ne sait en général pas en trouver la solution.

La recherche de modèles simples, dont on puisse donner la solution exacte, est utile pour plusieurs raisons. Citons, par exemple, la possibilité de tester certaines approximations utilisées habituellement dans des problèmes à trois corps et, d'autre part, celle de contrôler le bon fonctionnement de calculs numériques exacts dans le cadre de ce problème.

Le modèle unidimensionnel de trois particules avec interaction de contact, que nous analysons dans ce travail, est l'un de ceux dont on connaît certaines solutions particulières. Malheureusement, les restrictions apportées au modèle, pour obtenir des solutions, font que son contenu physique est par trop diminué, en particulier tous les seuils de réaction sont confondus et l'amplitude de fracture, ou d'ionisation, est nulle. Notre espoir avait été d'étendre les solutions connues de ce problème. Nous devons avouer que, pour le moment en tous cas, nous avons échoué dans notre tentative. Nous pensons toutefois que notre approche du problème a permis d'éclaircir certains points restés obscurs dans la littérature. De plus, elle fournit peut-être un bon point de départ pour une solution plus générale du problème.

Dans le premier chapitre nous introduisons les différentes équations, que l'on peut écrire, pour les fonctions d'onde du problème à trois corps. Le deuxième chapitre est consacré à un rappel des symétries des fonctions d'onde en relation avec l'identité des particules. Nous abordons les solutions explicites du problème dans le troisième chapitre. Enfin, dans le quatrième chapitre, nous extrayons les amplitudes de diffusion des fonctions d'onde.

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici notre reconnaissance à M. le Professeur P. Huguenin qui a dirigé ce travail. Nous tenons aussi à remercier particulièrement nos amis R. Viennet et J. Beiner de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et de l'aide qu'ils nous ont donnée par leurs discussions. Nous remercions aussi vivement nos amis et camarades du groupe de Physique Théorique de leur accueil.

Chapitre 1

Les différentes équations du problème à trois corps.

L'idée de départ de ce travail est de trouver et d'étudier la solution du problème suivant: on considère trois particules ponctuelles évoluant dans un univers à une dimension. Nous noterons m_i les masses, x_i les coordonnées et k_i les impulsions de ces trois particules ($i = 1, 2, 3$). Nous supposerons qu'il n'y a que des interactions à deux corps, décrites par les potentiels

$$V_{ij}(x_i, x_j) = V_{ij}(|x_i - x_j|) = -\bar{\lambda}_{ij} \delta(x_i - x_j) \quad (1.1)$$

Le symbole δ représente la mesure de Dirac et le signe est choisi de telle façon que $\lambda > 0$ corresponde à un potentiel attractif. Un tel potentiel peut être considéré comme la limite d'un puits carré infiniment profond et infiniment mince.

Nous adopterons dans ce travail la convention de notation suivante: un indice pourra représenter soit une particule, soit le couple des deux autres particules; ainsi nous écrirons V_3 pour V_{12} et λ_3 pour λ_{12} .

Le système considéré est complètement décrit par une fonction d'onde $\square(x_1, x_2, x_3)$. Dans ce chapitre nous introduirons un certain nombre d'équations que la fonction d'onde $\square$ doit satisfaire.

1.1 L'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger du problème considéré s'écrit:

$$\left\{ - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \bar{\lambda}_1 \delta(x_1 - x_2) - \bar{\lambda}_2 \delta(x_1 - x_3) - \bar{\lambda}_3 \delta(x_2 - x_3) \right\} \square(x_1, x_2, x_3) \quad (1.2)$$

$$= E' \square(x_1, x_2, x_3)$$

où E' est l'énergie totale du système.

Pour que le problème soit bien posé il faut encore préciser la classe de fonctions à laquelle appartient $\square$ et en particulier les conditions asymptotiques qu'elle doit satisfaire. Toutefois nous reportons ce problème à un prochain paragraphe.

Introduisons les variables définies dans l'appendice A :

$$R = \left(\frac{2}{\Pi} \right)^{1/2} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$$

$$r_3 = \left(\frac{2 m_1 m_2}{\Pi_3} \right)^{1/2} (x_2 - x_1)$$

$$g_3 = \left(\frac{2 m_1 \Pi_3}{\Pi} \right)^{1/2} \left(x_3 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{\Pi_3} \right)$$

$$\Pi = m_1 + m_2 + m_3, \quad \Pi_3 = m_1 + m_2$$

On calcule que

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2 m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial g_3^2} \quad (1.3)$$

De plus on a (voir appendice A)

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \left(\frac{\Pi_1}{2 m_1 m_2} \right)^{1/2} \left(\left(\frac{m_1 m_2}{\Pi_1 \Pi_3} \right)^{1/2} r_3 - \left(\frac{m_2 \Pi}{\Pi_1 \Pi_3} \right)^{1/2} g_3 \right) \\ &= \left(\frac{\Pi_1}{2 m_1 m_2} \right)^{1/2} (r_3 \cos \alpha - g_3 \sin \alpha) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= \left(\frac{\Pi_2}{2 m_1 m_3} \right)^{1/2} \left(\left(\frac{m_1 m_2}{\Pi_2 \Pi_3} \right)^{1/2} r_3 + \left(\frac{m_1 \Pi}{\Pi_2 \Pi_3} \right)^{1/2} g_3 \right) \\ &= \left(\frac{\Pi_2}{2 m_1 m_3} \right)^{1/2} (r_3 \cos \beta + g_3 \sin \beta) \end{aligned}$$

$$x_2 - x_1 = \left(\frac{\pi_3}{2 m_1 m_2} \right)^{1/2} r_3 \quad (1.4)$$

$$\text{où } t_g \alpha = \left(\frac{m_2 \pi}{m_1 m_3} \right)^{1/2} \text{ et } t_g \beta = \left(\frac{m_1 \pi}{m_2 m_3} \right)^{1/2} .$$

En remplaçant (1.3) et (1.4) dans l'équation de Schrödinger (1.2) et en posant

$$\square (x_1, x_2, x_3) = e^{iKR} \Psi(r_3, g_3) \quad (1.5)$$

pour éliminer le mouvement du centre de masse, on obtient l'équation de Schrödinger dans le repère du centre de masse:

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial r_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial g_3^2} - \bar{\lambda}_1 \left(\frac{2 m_1 m_2}{\pi_1} \right)^{1/2} \delta(r_3 \cos \alpha - g_3 \sin \alpha) - \bar{\lambda}_2 \left(\frac{2 m_1 m_3}{\pi_2} \right)^{1/2} \delta(r_3 \cos \beta + g_3 \sin \beta) \right. \\ \left. - \bar{\lambda}_3 \left(\frac{2 m_2 m_3}{\pi_3} \right)^{1/2} \delta(r_3) \right\} \Psi(r_3, g_3) = E \Psi(r_3, g_3) \quad (1.6)$$

où $E = E' - K^2$ est l'énergie totale dans le centre de masse. Pour alléger l'écriture nous supprimerons l'indice sur les variables r et g lorsque cela ne prêterait pas à confusion. Posons de plus

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i \left(\frac{2 m_j m_k}{\pi_i} \right)^{1/2} \quad i \neq j \neq k \neq i \quad (1.7)$$

Ainsi (1.6) s'écrit:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \lambda_1 \delta(r \cos \alpha - \varrho \sin \alpha) + \lambda_2 \delta(r \cos \beta + \varrho \sin \beta) \right. \\ \left. + \lambda_3 \delta(r) + E \right\} \Psi(r, \varrho) = 0 \quad (1.8)$$

Cette équation est à considérer au sens des distributions. Le support du potentiel est constitué par les trois droites $r_1 = \varrho_1 \tan \alpha$, $r_2 = -\varrho_2 \tan \beta$ et $r_3 = 0$. Ces droites divisent le plan du centre de masse en six secteurs correspondant chacun à un ordre déterminé des particules (fig. 1.1)

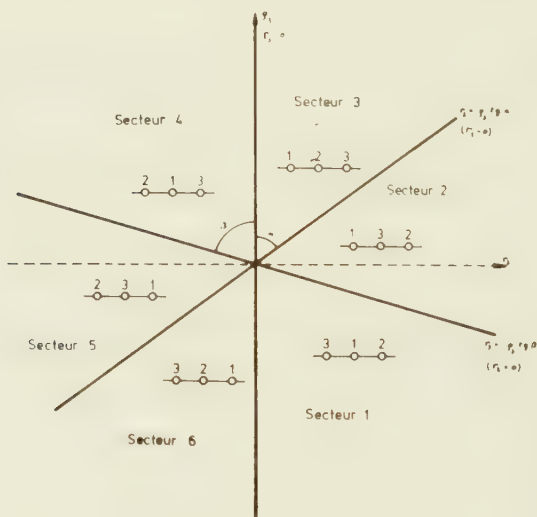


Fig. 1.1 Division du plan du centre de masse en secteurs par le support des potentiels

1.2 Ondes asymptotiques et canaux de diffusion.

La différence essentielle entre l'équation de Schrödinger du problème à trois corps et celle du problème à deux corps, c'est que, dans celui-là il y a des directions de l'espace suivant lesquelles le potentiel ne tend pas vers zéro lorsque l'on s'éloigne vers l'infini. Ceci va se refléter dans la forme asymptotique des fonctions d'ondes. Une façon de considérer cette forme asymptotique est de se placer dans le cadre du formalisme multi-canaux. Soit H l'hamiltonien de notre problème. Définissons les hamiltoniens de canaux H_i par

$$H_i = \lim_{|g_i| \rightarrow \infty} H$$

et H'_i par

(1.9)

$$H = H_i + H'_i$$

On a évidemment $H_i = H_0 + V_i$, $H'_i = V_i + V_k$

On considère de plus la séparation habituelle de H en énergie cinétique et potentielle , $H = H_0 + V$, $V = V_1 + V_2 + V_3$.

En terme de particules, le canal 0 correspond à une situation asymptotique où les trois particules sont libres. Tandis que le canal 1 , par exemple, décrit une situation où les particules 2 et 3 sont liées et où la particule 1 n'interagit pas avec cet état lié.

Dans le cas du modèle qui nous occupe il y a un et un seul état lié dans le canal i , pour autant que $\lambda_i > 0$. L'énergie de cet état lié est (cf. app. B):

$$E_i = - \frac{\lambda_i^2}{4} \quad (1.10)$$

On dit qu'un canal i est ouvert si l'énergie totale E , dans le centre de masse, est plus grande que l'énergie E_i de l'état lié dans le canal considéré. D'autre part le canal α est ouvert dès que $E > 0$, $E = 0$ correspondant au seuil de fracture.

La forme asymptotique des solutions de l'équation (1.8) peut maintenant être précisée. On a deux types de solutions. Premièrement pour $E_0 < \min_i E_i$, il peut exister un état lié à trois particules; la fonction d'onde Ψ_0 tend alors vers zéro dans toutes les directions de l'espace et elle est de carré sommable. Deuxièmement pour tout $E > \min_i E_i$ on a des solutions de diffusion $\Psi_{\alpha,E}^{(+)}$. La forme asymptotique d'une telle fonction est donnée par:

$$\Psi_{\alpha,E}^{(+)} \sim \varphi_{\alpha,E} + \Psi_s \quad (1.11)$$

où $\varphi_{\alpha,E}$ est un état propre de l'hamiltonien H_α , décrivant l'état incident préparé dans le canal α , et Ψ_s ne contient que des ondes sortantes, dans les différents canaux ouverts. Remarquons que l'existence de plusieurs canaux rend difficile l'utilisation de ce dernier critère, car la séparation des différents canaux au niveau de la fonction d'onde globale n'est nullement triviale.

Les fonctions propres des hamiltoniens de canaux sont (cf. app. B)

$$\varphi_{0,p,q}(r_i, g_i) = \frac{1}{2\pi} e^{i(p r_i + q g_i)} \quad (1.12)$$

$$\varphi_{i,q}(r_i, g_i) = \sqrt{\frac{\lambda_i}{4\pi}} e^{i q g_i} e^{-\frac{\lambda_i}{2} |r_i|}$$

Ces fonctions étant normées à:

$$\begin{aligned} (\varphi_{0,p}, \varphi_{0,p'}) &= \delta(p-p') \delta(q-q') \\ (\varphi_{i,q}, \varphi_{i,q'}) &= \delta(q-q') \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.3 Les équations de Lippmann - Schwinger.

Dans les problèmes de diffusion, on préfère habituellement travailler avec des équations intégrales, car on peut y inclure les conditions asymptotiques.

Introduisons les résolvantes des différents hamiltoniens du problème:

$$\begin{aligned} G(z) &= (z - H)^{-1} \\ G_i(z) &= (z - H_i)^{-1} \\ G_o(z) &= (z - H_o)^{-1} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Les fonctions de Green retardées sont alors définies par:

$$G_{\alpha}^{+}(E) = G_{\alpha}(E + i0) \tag{1.15}$$

Les différentes résolvantes sont liées par la seconde identité des résolvantes:

$$\begin{aligned} G(z) &= G_o(z) + G_o(z) H' G(z) \\ &= G_o(z) + G(z) H' G_o(z) \\ G_i(z) &= G_o(z) + G_o(z) V_i G_i(z) \\ &= G_o(z) + G_i(z) V_i G_o(z) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Etant donné un état incident $\psi_{in}(E, \alpha)$, solution propre de l'un des hamiltoniens asymptotiques, on obtient la solution de diffusion correspondante de la façon suivante (voir app. C):

$$\psi^{(+)}(E, \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i\varepsilon G(E + i\varepsilon) \psi_{in}(E, \alpha) \quad (1.17)$$

Considérons premièrement le cas d'un faisceau incident formé de trois particules libres, c'est-à-dire $\psi_{in} = \varphi_{pq}$ (1.12). On a évidemment $(E = p^2 + q^2)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i\varepsilon G_0(E + i\varepsilon) \varphi_{pq} = \varphi_{pq} \quad (1.18)$$

Il n'est dès lors pas difficile d'obtenir, en utilisant (1.16), l'équation de Lippmann-Schwinger pour $\psi_{pq}^{(+)}$:

$$\psi_{pq}^{(+)} = \varphi_{pq} + G_0^+(E) H' \psi_{pq}^{(+)} \quad (1.19)$$

Cette équation de Lippmann-Schwinger est exactement la même que celle que l'on obtient dans le cadre du problème à deux corps. Toutefois elle ne permet pas d'atteindre le but fixé. En effet Faddeev [Fad 61] a montré que la solution de (1.19) n'est pas unique, c'est-à-dire qu'elle ne fixe pas entièrement les conditions asymptotiques. Pour le voir, considérons un état lié, dans le canal i , φ_i (1.12) et calculons: $(E = q^2 - \frac{\lambda_i^2}{4})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i\varepsilon G_0(E + i\varepsilon) \varphi_i$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i\varepsilon G_i(E + i\varepsilon) \varphi_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G_0(E + i\varepsilon) V_i i\varepsilon G_i(E + i\varepsilon) \varphi_i \quad (1.20)$$

$$= \varphi_i - G_0^+(E) V_i \varphi_i = 0$$

Car φ_{i_q} est fonction propre de l'hamiltonien H_i et décrit un état lié, donc satisfait l'équation de Lippmann - Schwinger homogène ci-dessus. Ceci montre que la solution de diffusion $\psi_{i_q}^{(+)}$ correspondante satisfait l'équation (1.19) homogène:

$$\psi_{i_q}^{(+)} = G_o^+(E) H_i' \psi_{i_q}^{(+)} \quad (1.21)$$

On peut essayer d'exprimer $G(z)$ en fonction de $G_i(z)$:

$$G(z) = G_i(z) + G_i(z) H_i' G(z) \quad (1.22)$$

On a alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} i\varepsilon G_i(E+i\varepsilon) \varphi_{i_q} = \varphi_{i_q} \quad (1.23)$$

Posons
$$\tilde{\varphi}_{i_{pq}}^{(+)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} i\varepsilon G_i(E+i\varepsilon) \varphi_{o_{pq}} \quad (1.24)$$

$\tilde{\varphi}_{i_{pq}}^{(+)}$ est la solution de diffusion correspondant à un faisceau entrant de trois particules libres, dans le cas où seul le couple i de particules interagit.

On obtient alors des équations inhomogènes pour $\psi_{o_{pq}}^{(+)}$ et $\psi_{i_q}^{(+)}$:

$$\psi_{o_{pq}}^{(+)} = \tilde{\varphi}_{i_q}^{(+)} + G_o^+(E) H_i' \psi_{o_{pq}}^{(+)} \quad (1.25)$$

$$\psi_{i_q}^{(+)} = \varphi_{i_q} + G_i^+(E) H_i' \psi_{i_q}^{(+)}$$

Par contre, pour $j \neq i$, $\psi_{iq}^{(i)}$ satisfait l'équation (1.25) homogène. En effet, posons $(E = q^2 - \frac{\lambda_i^2}{4})$

$$\Phi(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} i\varepsilon G_i(E+i\varepsilon) \psi_{iq} \quad (1.26)$$

L'ensemble des fonctions propres de H_i , $\{\psi_{iq}^{(i)}\}_{q>0} \cup \{\hat{\psi}_{iq}^{(i)}\}_{q>0}$, forme un système total orthogonal. Cherchons les coefficients de Fourier de $\Phi(E)$ dans cet ensemble:

$$\begin{aligned} C_E(E') &= (\psi_{iq'}, \Phi(E)) = (\psi_{iq'}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} i\varepsilon \frac{1}{E-E'+i\varepsilon} \psi_{iq}) \\ &= \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{-i\varepsilon}{E-E'+i\varepsilon} \psi_{iq'}, \psi_{iq} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{i\varepsilon}{E-E'+i\varepsilon} (\psi_{iq'}, \psi_{iq}) \end{aligned}$$

Or, comme $\psi_{iq'}$ et ψ_{iq} sont fonctions propres d'hamiltoniens de canaux différents, on peut se convaincre que $(\psi_{iq'}, \psi_{iq})$ est une fonction continue de q' . De plus

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{i\varepsilon}{E-E'+i\varepsilon} &= 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{E-E'}{E-E'+i\varepsilon} \\ &= 1 - (E-E') \mathcal{P} \frac{1}{E-E'} + i\pi(E-E') \delta(E-E') = 0 \end{aligned}$$

On obtient donc que $C_E(E') = 0$, au sens des distributions. Un raisonnement identique montre que $\hat{C}_E(E') = (\hat{\psi}_{iq'}^{(i)}, \Phi(E)) = 0$. Finalement on obtient que $\Phi(E) = 0$, ainsi $\psi_{iq}^{(i)}$ satisfait l'équation:

$$\Psi_{dq}^{(*)} = G_i^+(E) H_i' \Psi_{dq}^{(*)} \quad (1.27)$$

Il n'est donc pas possible d'écrire des équations du type Lippmann - Schwinger qui aient une solution unique correspondant à une onde incidente bien déterminée.

Une façon plus correcte mathématiquement de considérer le problème est d'étudier le noyau de l'équation de Lippmann - Schwinger.

Weinberg [Wei 64] a montré que ce noyau n'est pas compact. Ceci fait que toutes les méthodes de solutions habituelles (par exemple la méthode de Fredholm) sont inapplicables. En particulier une équation intégrale dont le noyau n'est pas compact ne se prête pas à un traitement numérique, car un tel noyau ne peut être approché par un noyau de rang fini.

1.4 Les équations de Faddeev.

La solution du problème évoqué au paragraphe précédent a été trouvée par Faddeev [Fad 61a, 61b, 63]. Dans ce paragraphe nous allons établir formellement les équations de Faddeev pour les fonctions d'ondes.

Pour établir ces équations écrivons différemment la résolvante $G(z)$ (1.16). De (C.-21) on tire l'expression suivante pour l'interaction:

$$H' = T(z) - T(z) G_o(z) H' \quad (1.28)$$

En introduisant cette forme dans (1.16) il vient:

$$\begin{aligned} G(z) &= G_o(z) + G_o(z) (T(z) - T(z) G_o(z) H') G(z) \\ &= G_o(z) + G_o(z) T(z) (G(z) - G_o(z) H' G(z)) \\ &= G_o(z) + G_o(z) T(z) G_o(z) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Trouver une autre forme de la résolvante $G(z)$ revient donc à en chercher une autre pour l'opérateur $T(z)$. Considérons alors l'équation (C.-21):

$$T(z) = H' + H' G_o(z) T(z) \quad (1.30)$$

$$= V_1 + V_2 + V_3 + (V_1 + V_2 + V_3) G_o(z) T(z)$$

Définissons alors les trois opérateurs suivants:

$$T^{(i)}(z) = V_i + V_i G_o(z) T(z) \quad (1.31)$$

Par linéarité on a:

$$T(z) = T^{(1)}(z) + T^{(2)}(z) + T^{(3)}(z) \quad (1.32)$$

Si l'on se souvient que les opérateurs opèrent à droite sur les états, on peut interpréter cette décomposition en disant que $T^{(i)}$ décrit l'ensemble des processus de diffusion se "terminant" par l'interaction du $i^{\text{ème}}$ couple de particules. L'équation (1.32) exprime alors que la diffusion se "termine" forcément par l'interaction de l'un des couples de particules.

Il ne faut évidemment pas confondre les opérateurs définis ci-dessus avec les opérateurs T_i , extensions à trois corps des opérateurs à deux corps t_i , décrivant la diffusion du $i^{\text{ème}}$ couple de particules dans le cas où la troisième particule n'interagit pas. Les opérateurs T_i satisfont l'équation:

$$\begin{aligned} T_i(z) &= V_i + V_i G_o(z) T_i(z) \\ &= V_i + T_i(z) G_o(z) V_i \end{aligned} \quad (1.33)$$

De l'équation ci-dessus on tire:

$$V_i = T_i(z) - T_i(z) G_o(z) V_i \quad (1.34)$$

En substituant (1.34) dans (1.31) il vient:

$$\begin{aligned} T^{(i)}(z) &= T_i(z) - T_i(z) G_o(z) V_i + T_i(z) G_o(z) T(z) - T_i(z) G_o(z) V_i G_o(z) T(z) \\ &= T_i(z) + T_i(z) G_o(z) T(z) - T_i(z) G_o(z) (V_i - V_i G_o(z) T(z)) \\ &= T_i(z) + T_i(z) G_o(z) (T(z) - T^{(i)}(z)) \\ &= T_i(z) + T_i(z) G_o(z) (T^{(j)}(z) + T^{(k)}(z)) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ce sont les équations de Faddeev pour l'opérateur T . On peut les écrire sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} T^{(1)}(z) \\ T^{(2)}(z) \\ T^{(3)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(z) \\ T_2(z) \\ T_3(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_1(z) & T_1(z) \\ T_1(z) & 0 & T_2(z) \\ T_2(z) & T_3(z) & 0 \end{pmatrix} G_o(z) \begin{pmatrix} T^{(1)}(z) \\ T^{(2)}(z) \\ T^{(3)}(z) \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Cette décomposition de l'opérateur T induit une décomposition similaire de la résolvante (1.29)

$$G(z) = G_0(z) + G^{(1)}(z) + G^{(2)}(z) + G^{(3)}(z) \quad (1.37)$$

avec

$$G^{(i)}(z) = G_0(z) T^{(i)}(z) G_0(z) \quad (1.38)$$

satisfaisant les équations

$$\begin{pmatrix} G^{(1)}(z) \\ G^{(2)}(z) \\ G^{(3)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(z) - G_0(z) \\ G_2(z) - G_0(z) \\ G_3(z) - G_0(z) \end{pmatrix} + G_0(z) \begin{pmatrix} 0 & T_1(z) & T_1(z) \\ T_2(z) & 0 & T_1(z) \\ T_1(z) & T_1(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{(0)}(z) \\ G^{(1)}(z) \\ G^{(2)}(z) \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Pour obtenir les équations de Faddeev pour les fonctions d'onde, il suffit de multiplier les deux membres de (1.39) par $i\varepsilon$, de remplacer z par $E + i\varepsilon$ et de passer à la limite. Dans le cas d'un faisceau incident de trois particules libres on obtient, en tenant compte de (1.18) et (1.24):

$$\psi_{0pq}^{(4)} = \varphi_{0pq} + \psi_{0pq}^{(1)} + \psi_{0pq}^{(2)} + \psi_{0pq}^{(3)} \quad (E = p^2 + q^2)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{0pq}^{(1)} \\ \psi_{0pq}^{(2)} \\ \psi_{0pq}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1pq}^{(1)} - \varphi_{1pq} \\ \hat{\varphi}_{2pq}^{(1)} - \varphi_{2pq} \\ \hat{\varphi}_{3pq}^{(1)} - \varphi_{3pq} \end{pmatrix} + G_0^+(E) \begin{pmatrix} 0 & T_1(E) & T_1(E) \\ T_2(E) & 0 & T_1(E) \\ T_1(E) & T_1(E) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{0pq}^{(1)} \\ \psi_{0pq}^{(2)} \\ \psi_{0pq}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Dans le cas de la diffusion de la particule 1 sur l'état lié (2,3) il vient, en tenant compte de (1.20), (1.23) et (1.26):

$$\psi_{1q}^{(1)} = \psi_{1q}^{(1)} + \psi_{1q}^{(2)} + \psi_{1q}^{(3)} \quad (E = q^2 - E_i)$$

E_i : énergie du seuil
du canal i

$$\begin{pmatrix} \psi_{1q}^{(1)} \\ \psi_{1q}^{(2)} \\ \psi_{1q}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{1q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + G_o^+(E) \begin{pmatrix} 0 & T_1(E) & T_1(E) \\ T_1(E) & 0 & T_2(E) \\ T_2(E) & T_2(E) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1q}^{(1)} \\ \psi_{1q}^{(2)} \\ \psi_{1q}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

On obtient des équations semblables pour $\psi_{2q}^{(1)}$ et $\psi_{3q}^{(1)}$, seul le terme inhomogène étant changé en $(0, \varphi_{2q}, 0)$ et $(0, 0, \varphi_{3q})$ respectivement.

Finalement, s'il y a un (ou plusieurs) état lié, la fonction d'onde correspondante satisfera l'équation homogène:

$$\psi_B = \psi_B^{(1)} + \psi_B^{(2)} + \psi_B^{(3)} \quad (E_B < \min E_i)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_B^{(1)} \\ \psi_B^{(2)} \\ \psi_B^{(3)} \end{pmatrix} = G_o^+(E_B) \begin{pmatrix} 0 & T_1(E_B) & T_1(E_B) \\ T_1(E_B) & 0 & T_2(E_B) \\ T_2(E_B) & T_2(E_B) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_B^{(1)} \\ \psi_B^{(2)} \\ \psi_B^{(3)} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

1.4 Forme différentielle des équations de Faddeev.

Pour clore ce chapitre nous allons encore donner les équations différentielles que doivent satisfaire les différents $\psi^{(i)}$ introduits au paragraphe précédent.

Les équations (1.40), (1.41) et (1.42) ont toutes la forme suivante:

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= I^{(1)} + G_0^+ T_1 (\psi^{(2)} + \psi^{(3)}) \\ \psi^{(2)} &= I^{(2)} + G_0^+ T_2 (\psi^{(1)} + \psi^{(3)}) \\ \psi^{(3)} &= I^{(3)} + G_0^+ T_3 (\psi^{(1)} + \psi^{(2)})\end{aligned}\tag{1.43}$$

où seule l'inhomogénéité I change.

Multiplions formellement la première équation par $G_1^{-1} = (E - H_0 - V_1)$, il vient:

$$(H_0 - E + V_1) \psi^{(1)} = -(H_0 - E + V_1) I^{(1)} - G_1^{-1} G_0 T_1 (\psi^{(2)} + \psi^{(3)})\tag{1.44}$$

Or on a:

$$G_0 T_1 = (G_1 - G_1 V_1 G_0) T_1 = G_1 (T_1 - V_1 G_0 T_1) = G_1 V_1\tag{1.45}$$

et (1.44) devient

$$(H_0 - E + V_1) \psi^{(1)} = -(H_0 - E + V_1) I^{(1)} - V_1 (\psi^{(2)} + \psi^{(3)})\tag{1.46}$$

En multipliant les deux autres équations par G_i^{-1} et G_j^{-1} respectivement on obtient:

$$(H_0 - E + V_1) \Psi^{(1)} = - (H_0 - E + V_1) I^{(1)} - V_1 (\Psi^{(2)} + \Psi^{(3)})$$

$$(H_0 - E + V_2) \Psi^{(2)} = - (H_0 - E + V_2) I^{(2)} - V_2 (\Psi^{(1)} + \Psi^{(3)}) \quad (1.47)$$

$$(H_0 - E + V_3) \Psi^{(3)} = - (H_0 - E + V_3) I^{(3)} - V_3 (\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)})$$

En particulierisant les inhomogénéités on obtient les deux systèmes d'équations suivants:

- Pour le cas d'un faisceau incident de trois particules libres

$$\Psi_{opq}^{(1)} = \varphi_{opq} + \Psi_{opq}^{(2)} + \Psi_{opq}^{(3)} + \Psi_{opq}^{(1)} \quad (E = p^2 + q^2)$$

$$(H_0 - E + V_1) \Psi_{opq}^{(1)} = - V_1 (\Psi_{opq}^{(2)} + \Psi_{opq}^{(3)} + \varphi_{opq})$$

$$(H_0 - E + V_2) \Psi_{opq}^{(2)} = - V_2 (\Psi_{opq}^{(1)} + \Psi_{opq}^{(3)} + \varphi_{opq}) \quad (1.48)$$

$$(H_0 - E + V_3) \Psi_{opq}^{(3)} = - V_3 (\Psi_{opq}^{(1)} + \Psi_{opq}^{(2)} + \varphi_{opq})$$

- Pour le cas de la diffusion de la particule i sur l'état lié (j, k)

- Pour la cas d'un état lié à trois particules

$$\Psi_{ij}^{(+)} = \Psi_{ij}^{(1)} + \Psi_{ij}^{(2)} + \Psi_{ij}^{(3)} \quad (E = q^2 - E_i)$$

$$\Psi_B = \Psi_B^{(1)} + \Psi_B^{(2)} + \Psi_B^{(3)} \quad (E_0 < \min_i E_i)$$

$$\begin{aligned}(H_0 - E + V_1) \psi^{(1)} &= -V_1 (\psi^{(2)} + \psi^{(3)}) \\(H_0 - E + V_2) \psi^{(2)} &= -V_2 (\psi^{(1)} + \psi^{(3)}) \\(H_0 - E + V_3) \psi^{(3)} &= -V_3 (\psi^{(1)} + \psi^{(2)})\end{aligned}\quad (1.49)$$

On constate donc que les $\psi^{(i)}$ satisfont des équations différentielles couplées, ce qui n'a rien d'étonnant; par contre il est assez remarquable que le système correspondant à un faisceau incident formé de trois particules libres soit inhomogène.

Puisque nous avons ici des équations différentielles, le problème n'est pas déterminé tant que nous n'avons rien dit de la forme asymptotique des fonctions $\psi^{(i)}$. L'étude de cette forme asymptotique se fait à partir de la forme intégrale des équations de Faddeev. Considérons premièrement le cas de la diffusion de la particule 1 sur un état lié des particules 2 et 3. La forme asymptotique de $\psi^{(1)}$ sera

$$\psi^{(1)} \sim \varphi_{1q} + \psi_s^{(1)} \quad (1.50)$$

où φ_{1q} est la fonction d'onde incidente (1.12) et où $\psi_s^{(1)}$ contient des ondes sortantes analogues à φ_{1q} , décrivant la diffusion élastique, et des ondes sortantes cylindriques, décrivant la fracture (si l'énergie est positive). Quant aux fonctions $\psi_s^{(2)}$ et $\psi_s^{(3)}$ elles ne contiendront pas d'ondes entrantes, mais seulement des ondes sortantes, décrivant l'échange et la fracture. Dans le cas de la diffusion de trois particules libres aucune des fonctions $\psi^{(i)}$ ne contiendra de partie entrante, quant aux parties sortantes, elles seront semblables au cas précédent mais contiendront, en plus, des ondes planes sortantes correspondant à des diffusions à deux corps sur couche d'énergie.

Chapitre 2

Particules identiques et symétries.

En mécanique quantique, dire que l'on a des particules identiques, c'est dire que deux états ne différant que par une permutation des particules ne peuvent être distingués. En particulier les observables doivent commuter avec les permutations des particules identiques; on dit alors que les observables sont symétriques. Cela implique que si un état est préparé avec une "certaine symétrie", il gardera toujours cette symétrie, puisque l'opérateur d'évolution est lui-même aussi symétrique.

Dans notre problème il faut distinguer deux cas, en dehors de celui de trois particules discernables. Premièrement on peut avoir trois particules identiques et alors les trois potentiels sont égaux, $\lambda_i = \lambda$, de même que les trois masses, ce qui fait que les angles α et β , définis dans la figure 1.1, sont tous deux égaux à $\frac{\pi}{3}$. Dans le deuxième cas on n'a que deux particules identiques. Dans la suite nous considérerons toujours que ce sont les particules 1 et 2 qui sont identiques et l'on posera $\alpha = \beta$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \mu$.

2.1 L'espace des états et le groupe des permutations.

Considérons un ensemble de n particules identiques. Soit $\mathcal{H}$ un espace de fonction complexes des coordonnées (au sens large) des particules.

$$f \in \mathcal{H} : (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \longmapsto f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

Remarquons qu'à une particule est associée une position dans le n -tuple et non l'indice de l'un des ξ . Par exemple $f(\xi_1, \xi_2, \dots)$

signifie que la première particule se trouve en ξ_i , la deuxième en ξ_j , etc.

On fait de $\mathcal{H}$ un S_n -espace vectoriel en définissant l'action d'un élément σ du groupe des permutations S_n sur un élément de $\mathcal{H}$ par:

$$(R_\sigma f)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}) \quad (2.2)$$

L'action ainsi définie est une représentation. En effet, calculons

$$(R_\tau(R_\sigma f))(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (R_\sigma f)(\xi_{\tau(1)}, \xi_{\tau(2)}, \dots, \xi_{\tau(n)})$$

Posons $\xi_{\tau(i)} = \eta_i$, alors

$$\begin{aligned} (R_\sigma f)(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) &= f(\eta_{\sigma(1)}, \eta_{\sigma(2)}, \dots, \eta_{\sigma(n)}) \\ &= f(\xi_{\tau\sigma(1)}, \xi_{\tau\sigma(2)}, \dots, \xi_{\tau\sigma(n)}) \\ &= (R_{\tau\sigma} f)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

Ce qui démontre notre assertion.

Cette représentation est réductible et comme le groupe est fini elle est complètement réductible. Soient $\{D^d\}$ les représentations irréductibles (unitaires) de S_n et soit d^d la dimension de la représentation D^d . On a le théorème d'orthogonalité suivant pour les éléments de matrice des D^d :

$$\sum_{\sigma \in S_n} D_{\mu\nu}^{d*}(\sigma) D_{\mu'\nu'}^{d'}(\sigma) = \frac{n!}{d^d} \delta_{dd'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} \quad (2.3)$$

Pour décomposer l'espace $\mathcal{H}$ en sous-espaces invariants nous suivrons la méthode exposée par Luehrmann [lue 68]. Un ensemble de fonctions $\{f_v^j\}_{v=1, \dots, \ell_j} \subset \mathcal{H}$ se transforme sous la $j^{\text{ème}}$ représentation irréductible de G , si l'on a pour tout $\sigma \in G_n$:

$$R_\sigma f_v^j = \sum_{\lambda=1}^{\ell_j} D_{v\lambda}^j(\sigma^{-1}) f_\lambda^j \quad (2.4)$$

Les fonctions f_v^j peuvent être considérées comme les vecteurs de base d'un sous-espace V^j de $\mathcal{H}$, de dimension ℓ_j . On a le théorème suivant:

Théorème 2.1: Soit O un opérateur qui commute avec les éléments de G_n . Les éléments de matrice de O entre des fonctions de symétrie donnée ont les propriétés suivantes:

- a) $(f_{v'}^j, O g_v^j) = 0$ si $j \neq j'$ ou $v \neq v'$
- b) $(f_v^j, O g_v^j)$ est indépendant de v

Démonstration: Comme R_τ est unitaire et commute avec O on a

$$\begin{aligned} (f_{v'}^{j'}, O g_v^j) &= (R_\tau f_{v'}^{j'}, O R_\tau g_v^j) \\ &= \sum_{\mu, \mu'} (D_{v\mu}^{j'}(\tau^{-1}) f_{\mu'}^{j'}, O D_{v\mu}^j(\tau^{-1}) g_\mu^j) \end{aligned}$$

En sommant sur tous les éléments du groupe il vient avec (2.3)

$$n! (f_{v'}^{j'}, O g_v^j) = \sum_{\mu, \mu'} (f_{\mu'}^{j'}, O g_\mu^j) \frac{n!}{\ell_j} \delta_{j'j} \delta_{\mu\mu'} \delta_{vv'}$$

$$(f_{\nu}^{\dagger}, g_{\nu}^{\dagger}) = \frac{1}{i!} \delta_{ij} \delta_{\nu\nu'} \sum_{\mu} (f_{\mu}^{\dagger}, g_{\mu}^{\dagger})$$

La partie a) est évidente. Quant à la partie b) il suffit de constater que le membre de droite ne dépend pas explicitement de ν . Ce qui termine la démonstration. En posant $\mathcal{O} = \mathbb{1}$ on obtient immédiatement le corollaire:

Corollaire: Des fonctions de symétries différentes sont orthogonales.

Ce théorème montre bien qu'aucune observable ne peut faire passer d'une symétrie à une autre. D'autre part, la partie b) indique qu'il est inutile de connaître toutes les fonctions de la symétrie (f, ν) pour calculer les valeurs d'attente des observables.

Il faut maintenant se demander comment construire des fonctions ayant une symétrie (j, ν) déterminée. Autrement dit, comment décomposer une fonction $f \in \mathcal{H}$ en ses différentes composantes. Pour répondre à cette question démontrons le

Théorème 2.2: L'ensemble des fonctions $\{f_{\mu}^{\dagger}\}_{\mu=1, \dots, \ell_j}$, j et ν étant fixés, définies par

$$f_{\mu, \nu}^{\dagger} = \frac{\ell_j}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} D_{\mu\nu}^{\dagger}(\sigma) R_{\sigma} f \quad (2.5)$$

où $f \in \mathcal{H}$ est arbitraire, sauf que l'ensemble $\{f_{\mu}^{\dagger}\}$ n'est pas nul, se transforme selon (2.4)

$$R_i f_{\mu, \nu}^{\dagger} = \sum_{\mu'=1}^{\ell_j} D_{\mu\mu'}^{\dagger}(i^{-1}) f_{\mu', \nu}^{\dagger}$$

Démonstration: Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
 R_z f_{\mu, \nu}^{\dagger} &= \frac{\ell_i}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{G}_n} D_{\mu, \nu}^{\dagger}(\sigma) R_z R_{\sigma} f \\
 &= \frac{\ell_i}{n!} \sum_{\tau \in \mathbb{G}_n} D_{\mu, \nu}^{\dagger}(\tau^{-1} \tau \sigma) R_{z \sigma} f \\
 &= \frac{\ell_i}{n!} \sum_{g \in \mathbb{G}_n} \sum_{\mu'} D_{\mu, \mu'}^{\dagger}(\tau^{-1}) D_{\mu', \nu}^{\dagger}(g) R_g f \\
 &= \sum_{\mu'} D_{\mu, \mu'}^{\dagger}(\tau^{-1}) f_{\mu', \nu}^{\dagger}
 \end{aligned}$$

c. q. f. d.

Ainsi les opérateurs

$$\mathcal{P}_{\mu, \nu}^{\dagger} = \frac{\ell_i}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{G}_n} D_{\mu, \nu}^{\dagger}(\sigma) R_{\sigma} \quad (2.6)$$

extraient ℓ_i ensembles de fonctions $\{f_{\mu, \nu}^{\dagger}\}_{\mu=1, \dots, \ell_i}$ se transformant sous la représentation irréductible $\mathcal{D}^{\dagger}$. Le fait que chaque représentation irréductible apparaisse autant de fois que sa dimension fait penser à la décomposition de la représentation régulière des groupes finis. Ceci n'a rien d'étonnant. En effet, les transformations que nous avons faites ne font pas intervenir directement les coordonnées des particules. Si l'on fixe un n -tuple ordonné de coordonnées $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, on peut associer à chaque fonction $f \in \mathcal{H}$ un élément $\hat{f}$ de l'algèbre des fonctions sur le groupe $\alpha(\mathbb{G}_n)$, par la relation suivante:

$$\hat{f}(\sigma) = f(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}) \quad (2.7)$$

Cherchons alors quelle est la représentation associée à $\mathcal{R}$ par cette application:

$$\widehat{\mathcal{R}_\tau f}(\sigma) = (\mathcal{R}_\tau f)(\{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\})$$

Posons $\{\sigma(i)\} = \eta_i$, alors

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}_\tau f}(\sigma) &= (\mathcal{R}_\tau f)(\eta_1, \dots, \eta_n) \\ &= f(\eta_{\tau(1)}, \dots, \eta_{\tau(n)}) \\ &= f(\{\sigma_{\tau(1)}, \dots, \sigma_{\tau(n)}\}) \\ &= \widehat{f}(\sigma_\tau) = \tau \cdot \widehat{f}(\sigma) \end{aligned}$$

Ce qui montre que la représentation associée à $\mathcal{R}$ est la représentation régulière à droite. Ainsi il est naturel que la décomposition d'une fonction $f \in \mathcal{H}$ en ses composantes irréductibles soit le reflet de la décomposition de $\mathcal{A}(\mathbb{G})$.

Les opérateurs $\mathcal{P}_{\mu\nu}^j$ ne sont pas des projecteurs, mais satisfont la relation

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^j \mathcal{P}_{\mu'\nu'}^{j'} = \delta_{j'j} \delta_{\nu'\nu} \mathcal{P}_{\mu\nu}^j \quad (2.8)$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu}^j \mathcal{P}_{\mu'\nu'}^{j'} &= \frac{\ell_j \ell_{j'}}{(n!)^2} \sum_{\sigma, \tau} D_{\mu\nu}^j(\sigma) D_{\mu'\nu'}^{j'}(\tau) R_\sigma R_\tau \\ &= \frac{\ell_j \ell_{j'}}{(n!)^2} \sum_{\sigma, \tau} D_{\mu\nu}^j(\sigma) D_{\mu'\nu'}^{j'}(\sigma^{-1}\sigma\tau) R_\sigma R_\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{\ell_j \ell_{j'}}{(n!)^2} \sum_{\tau, \varrho} \sum_{\lambda} D_{\mu\nu}^{\dagger}(\tau) D_{\mu'\lambda}^{\dagger}(\tau^{-1}) D_{\lambda\nu'}^{\dagger}(\varrho) R_{\varrho}$$

En utilisant l'unitarité des représentations $D^{\dagger}$ ainsi que la relation d'orthogonalité (2.3), il vient

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}^{\dagger} P_{\mu'\nu'}^{\dagger} &= \frac{\ell_j}{n!} \sum_{\lambda} \delta_{jj'} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\mu'} P_{\lambda\nu'}^{\dagger} \\ &= \delta_{jj'} \delta_{\nu\mu'} P_{\mu\nu}^{\dagger} \end{aligned}$$

comme annoncé.

Remarquons que les éléments diagonaux $P_{\nu}^{\dagger} = P_{\nu\nu}^{\dagger}$ ainsi que

$$P^{\dagger} = \sum_{\nu} P_{\nu}^{\dagger}$$

sont des projecteurs. Toutefois ils ne permettent pas d'obtenir un ensemble de fonctions se transformant entre-elles au moyen de la représentation $D^{\dagger}$.

Le théorème 2.1 s'énonce de la façon suivante, pour les fonctions de base obtenues au moyen de l'opérateur $P_{\mu\nu}^{\dagger}$:

Théorème 2.3: Soit $\mathcal{O}$ un opérateur qui commute avec les éléments de $\mathcal{G}_n$. Soient $t_{\mu\nu}^{\dagger} = P_{\mu\nu}^{\dagger} t$ et $g_{\mu\nu'}^{\dagger} = P_{\mu\nu'}^{\dagger} g$. Alors les éléments de matrice de $\mathcal{O}$ sont donnés par:

$$(t_{\mu\nu}^{\dagger}, \mathcal{O} g_{\mu'\nu'}^{\dagger}) = \delta_{jj'} \delta_{\nu\mu'} (t, \mathcal{O} g_{\nu\nu'}^{\dagger}) \quad (2.9)$$

Démonstration : Calculons

$$\begin{aligned}
 (f_{\mu\nu}^j, g_{\mu'\nu'}^{j'}) &= \frac{\ell_i \ell_{i'}}{(n!)^2} \sum_{\sigma, \tau} D_{\mu\nu}^{j*}(\sigma) D_{\mu'\nu'}^{j'}(\tau) (R_\sigma f, \sigma R_\tau g) \\
 &= \frac{\ell_i \ell_{i'}}{(n!)^2} \sum_{\sigma, g} D_{\mu\nu}^{j*}(\sigma) D_{\mu'\nu'}^{j'}(\sigma g) (R_\sigma f, \sigma R_{\sigma g} g) \\
 &= \frac{\ell_i \ell_{i'}}{(n!)^2} \sum_{\sigma, g} D_{\mu\nu}^{j*}(\sigma) \sum_{\alpha=1}^{\ell_{i'}} D_{\mu'\alpha}^{j'}(\sigma) D_{\alpha\nu'}^{j'}(g) (f, \sigma R_g g) \\
 &= \frac{\ell_i}{n!} \delta_{rr'} \delta_{\mu\mu'} \sum_g D_{\nu\nu'}^{j'}(g) (f, \sigma R_g g) \\
 &= \delta_{jj'} \delta_{\mu\mu'} (f, \sigma g_{\nu\nu'}^{j'})
 \end{aligned}$$

c. q. f. d.

Ce théorème contient toute l'information du théorème 2.1. Mais il montre en plus qu'il n'est pas nécessaire de symétriser les fonctions des deux côtés d'un produit scalaire, ce qui permet souvent de simplifier les calculs. Par contre ce théorème montre que, malheureusement, les fonctions de base obtenues ne sont pas orthogonales. En effet, en posant $\sigma = \mathbb{I}$, on obtient le

Corollaire: Les fonctions de symétries différentes sont orthogonales. Le recouvrement de deux fonctions de même symétrie est donné par:

$$(f_{\mu,\nu}^j, g_{\mu',\nu'}^{j'}) = (f, g_{\nu\nu'}^{j'})$$

Si $f = g$ on obtient l'intégrale de normalisation

$$(f_{\mu,\nu}^j, f_{\mu,\nu}^j) = \frac{f_j}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{G}_n} D_{\nu\nu}^j(\sigma) (f, R_\sigma f)$$

Nous ne nous étendrons pas ici sur le problème de l'interprétation physique des différents types de particules identiques, appartenant aux différentes symétries. Nous renvoyons pour cela à l'article de Greenberg et Messiah [Gre 65], par exemple. Nous nous bornerons à faire les quelques remarques suivantes.

Quel que soit $n \geq 2$ il existe deux représentations de dimension un. Ce sont la représentation triviale, d'une part, et la représentation alternée, d'autre part. La première est associée aux bosons, tandis que la seconde correspond aux fermions. Ce sont les seules représentations irréductibles si $n=2$. Le fait que les états de bosons ou de fermions se transforment sous une représentation de dimension un montre qu'ils sont entièrement décrits par une fonction d'onde.

2.2 Application au cas de trois particules identiques.

Le groupe $\mathbb{G}_3$ possède trois représentations irréductibles, deux de dimension un et une de dimension deux. Ces représentations sont données dans le tableau ci-dessous:

σ	D^0	D^1	D^2
e	1	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(123)	1	1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
(132)	1	1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
(12)	1	-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
(23)	1	-1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
(13)	1	-1	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Les représentations irréductibles de S_3

Remarquons que nous avons choisi, parmi toutes les représentations équivalentes de dimension deux, celle dans laquelle le sous-groupe abélien $G_1 = \{e, (12)\}$ est représenté par des matrices diagonales. Cela a le mérite de rendre plus clair le passage de trois particules identiques à deux particules identiques. D'autre part la représentation D^2 est ainsi orthogonale.

Les opérateurs $P_{\mu\nu}^d$ définis par la relation (2.3) sont alors

$$P_{\mu\nu}^d = \sum_{\sigma} a_{\mu\nu}^d(\sigma) R_{\sigma} \quad (2.10)$$

Les coefficients $a_{\mu\nu}^{\dot{\sigma}}(\sigma)$ étant donnés dans le tableau ci-dessous:

$\begin{smallmatrix} \dot{\sigma} \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \backslash \sigma$	e	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
(0)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(1)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 21 \end{pmatrix}$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 22 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tableau des coefficients $a_{\mu\nu}^{\dot{\sigma}}(\sigma)$

Remarquons que si $P_{\pm}$ désignent les projecteurs sur les fonctions paires et impaires sous l'échange des particules 1 et 2

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (R_e \pm R_{(12)}) \quad (2.11)$$

on a les relations

$$\begin{aligned} P_{11}^2 P_+ &= P_{11}^2 & P_{11}^2 P_- &= 0 \\ P_{21}^2 P_+ &= P_{21}^2 & P_{21}^2 P_- &= 0 \\ P_{12}^2 P_+ &= 0 & P_{12}^2 P_- &= P_{12}^2 \\ P_{22}^2 P_+ &= 0 & P_{22}^2 P_- &= P_{22}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ainsi les fonctions paires par rapport à l'échange des particules 1 et 2 se décomposent dans le sous-espace associé à la représentation triviale et dans le premier sous-espace associé à la représentation D^1 , tandis que les fonctions impaires se décomposent dans le sous-espace de la représentation alternée et dans le second sous-espace de la représentation D^1 .

Chapitre 3

Solutions particulières.

Les seules solutions particulières que l'on connaissait à l'époque du début de ce travail sont celles données par McGuire [McG 64]. Dans le cas de trois masses et de trois potentiels égaux, considéré par McGuire, la fonction d'onde, décrivant le cas où les trois particules incidentes sont libres, est la somme d'un nombre fini d'ondes planes dans chaque secteur (Fig. 1.1). On peut interpréter ce fait en disant que la processus complet de collision est formé de la succession de, au plus trois, collisions à deux corps sur la couche d'énergie, la troisième particule étant spectatrice. Il n'y a donc pas, dans ce cas, de véritable problème à trois corps et, de plus, il n'y a pas de fracture. La construction de McGuire, basée sur l'interprétation précédente, ne peut être étendue à des cas plus généraux.

Quant à nous, nous avons espéré obtenir des solutions plus générales en abordant le problème par le biais des équations de Faddeev. Malheureusement, jusqu'à maintenant, nous n'avons pas eu plus de succès que McGuire, à une exception près, d'ailleurs peu importante. Toutefois l'approche que nous avons suivie permet de comprendre un peu mieux certains phénomènes un peu plus généraux.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord écrire explicitement les équations de Faddeev dans l'espace des impulsions. Nous étudierons ensuite les formes asymptotiques possibles pour les fonctions $\psi_{(p,q)}^{(i)}$, puis nous donnerons les solutions explicites dans un certain nombre de cas particuliers.

3.1 Les équations de Faddeev.

Les équations de Faddeev (1.40 - 41 - 42) ont la forme générale

$$\Psi^{(1)} = \phi^{(1)} + G_0^+(E) T_1(E) (\Psi^{(2)} + \Psi^{(3)})$$

$$\Psi^{(2)} = \phi^{(2)} + G_0^+(E) T_2(E) (\Psi^{(1)} + \Psi^{(3)}) \quad (3.1)$$

$$\Psi^{(3)} = \phi^{(3)} + G_0^+(E) T_3(E) (\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)})$$

Les éléments de matrice des opérateurs $G_0^+ T_i$ ont une forme simple dans l'espace des impulsions. C'est pourquoi nous travaillerons avec des fonctions d'onde dans celui-ci, plutôt qu'avec leurs transformées de Fourier dans l'espace de configuration. D'autre part on dispose de trois repères (P_i, q_i) (Cf. A.-4). Aucun de ces repères n'étant privilégié, il est avantageux de les utiliser simultanément, en exprimant la fonction $\Psi^{(i)}$ dans le repère (P_i, q_i) . Cherchons d'abord les éléments de matrice de l'opérateur $G_0^+ T_i$. On a premièrement

$$G_0^+(E; P_i, q_i, P_i', q_i') = \frac{1}{E + i\epsilon - P_i^2 - q_i^2} \delta(P_i - P_i') \delta(q_i - q_i') \quad (3.2)$$

D'autre part

$$T_i(E, P_i, q_i, P_i', q_i') = \delta(q_i - q_i') t_i(E - q_i^2; P_i, P_i') \quad (3.3)$$

où $t_i(z; P, P')$ est l'élément de matrice de l'opérateur T à deux corps. En introduisant la forme obtenue dans l'appendice C (C.-32) on obtient:

$$T_i(E; P_i, q_i, P_i', q_i') = - \frac{\lambda_i}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q_i^2}}{\sqrt{E - q_i^2} - i \frac{\lambda_i}{2}} \delta(q_i - q_i') \quad (3.4)$$

L'application de $G_o^+ T_i$ à une fonction f donne ainsi:

$$\begin{aligned}
 (G_o^+(E) T_i(E) f)(p_i, q_i) &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_i' dq_i' dp_i'' dq_i'' G_o^+(E; p_i, q_i, p_i', q_i') T_i(E; p_i', q_i', p_i'', q_i'') f(p_i'', q_i'') \quad (3.5) \\
 &= - \frac{\lambda_i}{2\pi} \frac{1}{E + i\varepsilon - p_i^2 - q_i^2} \frac{\sqrt{E - q_i^2}}{\sqrt{E - q_i^2 - i \frac{\lambda_i}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_i' f(p_i', q_i')
 \end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver les formes explicites des termes inhomogènes. Considérons premièrement le cas de la diffusion d'une particule libre sur l'état lié des deux autres. Dans l'espace de configuration la fonction d'onde est formée du produit d'une onde plane dans la variable q , repérant la particule libre dans le centre de masse des deux autres, par la fonction d'état lié (B,-17) :

$$\tilde{\varphi}_{i,q_o}^{\sim}(r_i, q_i) = \sqrt{\frac{\lambda_i}{4\pi}} e^{i q_o \cdot r_i} e^{-\frac{\lambda_i}{2} |r_i|} \quad (3.6)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \varphi_{i,q_o}(p_i, q_i) &= \frac{1}{2\pi} \int dr_i dq_i e^{-i(p_i \cdot r_i + q_i \cdot r_i)} \tilde{\varphi}_{i,q_o}^{\sim}(r_i, q_i) \\
 &= \sqrt{\frac{\lambda_i}{4\pi}} \frac{1}{p_i^2 + \frac{\lambda_i}{4}} \delta(q_i - q_o)
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Puisque dans ce cas l'énergie est donnée par $E = q_1^2 - \frac{\lambda_1^2}{4}$ on peut écrire

$$\varphi_{i q_0}(p_i, q_i) = \sqrt{\frac{\lambda_1^3}{4\pi}} \frac{1}{p_i^2 + q_i^2 - E} \delta(q_i - q_1) \quad (3.8)$$

Considérons maintenant la diffusion de trois particules libres. On constate que le terme inhomogène de l'équation (1.40) est la différence de la fonction $\hat{\varphi}_{i p_0, q_0}^{(+)}$, correspondant à la diffusion d'un faisceau de trois particules libres, dans la cas où seul le couple i de particules interagit, et de la fonction libre φ_{p_0, q_0} . En utilisant (B.-12) on trouve que l'inhomogénéité cherchée est

$$\hat{\varphi}_{i p_0, q_0}^{(+)}(r_i, q_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{i \frac{\lambda_1}{2}}{|p_0| - i \frac{\lambda_1}{2}} e^{i q_0 \cdot q_i} e^{i |p_0| |r_i|} \quad (3.9)$$

En prenant la transformée de Fourier il vient :

$$\hat{\varphi}_{i p_0, q_0}(p_i, q_i) = -\frac{1}{2\pi} \frac{|p_0| \lambda_1}{|p_0| - i \frac{\lambda_1}{2}} \frac{1}{p_0^2 - p_i^2 + i \varepsilon} \delta(q_i - q_0) \quad (3.10)$$

Dans ce cas l'énergie s'écrit $E = p_0^2 + q_0^2$ et l'on a :

$$\hat{\varphi}_{i p_0, q_0}(p_i, q_i) = \frac{\lambda_1}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q_0^2}}{\sqrt{E - q_0^2} - i \frac{\lambda_1}{2}} \frac{1}{p_i^2 + q_i^2 - (E + i \varepsilon)} \delta(q_i - q_0) \quad (3.11)$$

Introduisons les angles α , β et γ entre les trois repères, définis dans la figure 3.1.

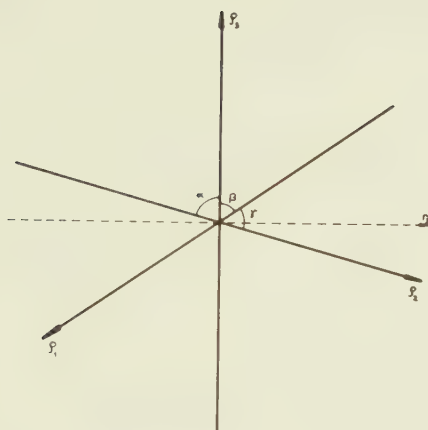


Fig. 3.1 Définition des angles entre les trois repères

Les relations entre les différentes coordonnées sont alors

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant écrire explicitement les équations de Faddeev pour la fonction d'onde :

$$\Psi^{(1)}(p_1, q_1) = \Phi^{(1)}(p_1, q_1) - \frac{\lambda_1}{2\pi} \frac{1}{E + i\epsilon - p_1^2 - q_1^2} \frac{\sqrt{E - q_1^2}}{\sqrt{E - q_1^2} - \frac{\lambda_1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\Psi^{(12)}(-x \cos \beta + q_1 \sin \beta, -x \sin \beta - q_1 \cos \beta) + \Psi^{(12)}(-x \cos \beta - q_1 \sin \beta, x \sin \beta - q_1 \cos \beta) \right]$$

$$\Psi^{(2)}(p_1, q_2) = \Phi^{(2)}(p_1, q_2) - \frac{\lambda_2}{2\pi} \frac{1}{E + i\epsilon - p_1^2 - q_2^2} \frac{\sqrt{E - q_2^2}}{\sqrt{E - q_2^2} - \frac{\lambda_2}{2}} \quad (3.13)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\Psi^{(12)}(-x \cos \beta - q_2 \sin \beta, x \sin \beta - q_2 \cos \beta) + \Psi^{(12)}(-x \cos \alpha + q_2 \sin \alpha, -x \sin \alpha - q_2 \cos \alpha) \right]$$

$$\Psi^{(3)}(p_2, q_3) = \Phi^{(3)}(p_2, q_3) - \frac{\lambda_3}{2\pi} \frac{1}{E + i\epsilon - p_2^2 - q_3^2} \frac{\sqrt{E - q_3^2}}{\sqrt{E - q_3^2} - \frac{\lambda_3}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\Psi^{(12)}(-x \cos \beta + q_3 \sin \beta, -x \sin \beta - q_3 \cos \beta) + \Psi^{(12)}(-x \cos \alpha - q_3 \sin \alpha, x \sin \alpha - q_3 \cos \alpha) \right]$$

Les inhomogénéités étant:

- Diffusion de trois particules libres:

$$\Phi^{(1)}(p_1, q_1) = \phi_{p_1 \cos \beta + q_1 \sin \beta, -p_1 \sin \beta - q_1 \cos \beta}(p_1, q_1)$$

$$\Phi^{(2)}(p_1, q_2) = \phi_{-p_1 \cos \alpha - q_2 \sin \alpha, -p_1 \sin \alpha - q_2 \cos \alpha}(p_1, q_2) \quad (3.14)$$

$$\Phi^{(3)}(p_2, q_3) = \phi_{p_2 \cos \alpha, p_2 \sin \alpha}(p_2, q_3)$$

où les ϕ_{pq} sont donnés par (3.11).

- Diffusion d'une particule sur un état lié:

$$\phi^{(i)}(p_i, q_i) = \delta_{i+} \varphi_{i q_i}(p_i, q_i) \quad (3.15)$$

où $\varphi_{i q_i}$ est donné par (3.8).

$$\text{- Etat lié: } \phi^{(i)}(p_i, q_i) = 0 \quad (3.16)$$

En examinant les équations (3.13) ainsi que les termes inhomogènes (3.8) et (3.11) on constate que la dépendance en p des fonctions $\psi^{(i)}$ est entièrement contenue dans le dénominateur commun $p^2 + q^2 - (E + i\epsilon)$. On posera donc

$$\psi^{(i)}(p, q) = \frac{1}{p^2 + q^2 - (E + i\epsilon)} f^{(i)}(q) \quad (3.17)$$

Les équations de Faddeev deviennent ainsi

$$f^{(1)}(q) = g^{(1)}(q) + \frac{\lambda_1}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda_1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + q^2 - (E + i\epsilon)} \left[f^{(2)}(-x \sin \alpha - q \cos \alpha) + f^{(1)}(x \sin \beta - q \cos \beta) \right]$$

$$f^{(2)}(q) = g^{(2)}(q) + \frac{\lambda_2}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda_2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + q^2 - (E + i\epsilon)} \left[f^{(1)}(x \sin \alpha - q \cos \alpha) + f^{(2)}(-x \sin \beta - q \cos \beta) \right] \quad (3.18)$$

$$f^{(3)}(q) = g^{(3)}(q) + \frac{\lambda_3}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda_3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + q^2 - (E + i\epsilon)} \left[f^{(1)}(-x \sin \beta - q \cos \beta) + f^{(2)}(x \sin \alpha - q \cos \alpha) \right]$$

$$\text{avec } g^{(i)}(q) = (p^2 + q^2 - (E + i\epsilon)) \phi^{(i)}(p, q) \quad (3.19)$$

3.2 Formes asymptotiques des solutions.

Etant donnée la forme générale (3.17) de la fonction d'onde dans l'espace des impulsions, nous pouvons, moyennant quelques hypothèses sur la fonction f , étudier la forme asymptotique de la fonction d'onde dans l'espace de configuration. Celle-ci s'écrit:

$$\begin{aligned} F^{(i)}(r, q) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho dq \, e^{i(\rho r + q q)} \psi^{(i)}(\rho, q) \\ &= \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho dq \, \frac{e^{i(\rho r + q q)}}{\rho^2 + q^2 - E} f^{(i)}(q) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nous laisserons tomber l'indice i , qui, pour ce qui suit, est tout à fait inutile. Nous devons ici distinguer deux cas suivant que l'énergie E est négative ou positive. Dans le premier cas on posera $E = -\alpha^2$, avec $\alpha > 0$. Dans le second, il est nécessaire de régulariser l'intégrale (3.20). Pour ce faire on pose $E = k^2 + i\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ puisque nous nous intéressons essentiellement à des fonctions d'onde du type $\psi^{(i)}$.

Premier cas : $E = -\alpha^2 < 0$

$$F(r, q) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho dq \, \frac{e^{i(\rho r + q q)}}{\rho^2 + q^2 + \alpha^2} f(q) \quad (3.21)$$

On peut intégrer sans autre sur p par résidus et l'on obtient

$$F(r, g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{i(i\sqrt{q^2+x^2}|r|+qg)}}{\sqrt{q^2+x^2}} f(q)$$

Effectuons le changement de variable $q = x \operatorname{Sh} \chi$ et passons aux coordonnées polaires dans le plan (r, g) en posant

$$\begin{aligned} |r| &= s \cos \theta \\ g &= s \sin \theta \end{aligned} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.22)$$

Après quelques calculs il vient

$$F(r, g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \ e^{-xs \cos(\theta+i\chi)} f(x \operatorname{Sh} \chi)$$

Posons finalement $w = \theta + i\chi$, d'où $\chi = -i(w - \theta)$ et $d\chi = -i dw$.
La fonction $F(r, g)$ prend alors la forme

$$F(r, g) = -\frac{i}{2} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} dw \ e^{-xs \cos w} f(-ix \sin(w-\theta)) \quad (3.23)$$

Le chemin d'intégration de (3.23) dans le plan w correspond au chemin $\tilde{C}$ dans la figure 3.2.

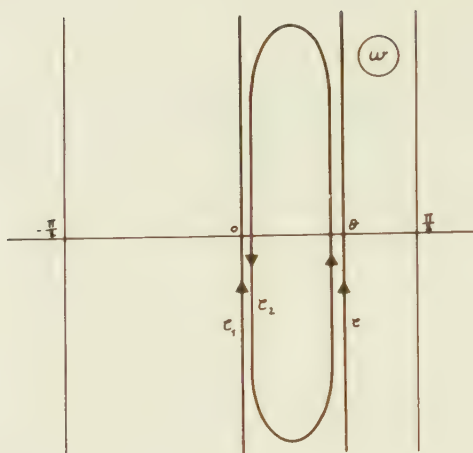


Fig. 3.2 Les différents chemins d'intégration dans le plan w

Remarquons que puisque $\cos(\alpha + i\beta) = \cos \alpha \operatorname{Ch} \beta - i \sin \alpha \operatorname{Sh} \beta$, la partie réelle de $\cos w$ reste positive pour $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$. Etant donné le domaine de variation de θ (3.22), le chemin C se trouve bien dans la bonne région du plan w pour que l'intégrale (3.23) converge, pour autant que f ne diverge pas trop vite. En fait on peut voir que pour que l'intégrale converge même pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire $r=0$) il suffit que $f(q) = O(q^{-\epsilon})$ $\epsilon > 0$ au voisinage de l'infini.

Pour pouvoir dire quelque chose de la forme asymptotique de $F(r, g)$ il est maintenant nécessaire de faire des hypothèses sur la forme analytique de f . Nous ferons l'hypothèse suivante

Hypothèse 3.1: $f(q)$ est analytique dans le plan complexe q sauf

- à l'infini où elle peut avoir une singularité essentielle
- en un nombre fini de points isolés où elle a des pôles simples.

La méthode qui s'impose ici pour trouver la forme asymptotique de $F(r, g)$ est la méthode du col. Le seul col à prendre en considération ici est évidemment celui se trouvant en $w=0$. Le chemin de plus grande pente est donné par l'une des solutions de

$$\operatorname{Im}(-xs \cos w) = \text{cte} = 0 \quad (3.24)$$

Il est évident qu'il faut prendre l'axe imaginaire, c'est-à-dire le chemin $\mathcal{C}_2$ de la figure 3.2. On peut alors écrire

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} \quad (3.25)$$

Le premier terme du membre de droite étant évalué par la méthode du col tandis que la deuxième est donné par les contributions des pôles se trouvant entre les chemins $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} &= -\frac{i}{s} \int_{-\infty}^{i\infty} dw e^{-xs \cos w} f(-ix \sin(w-\theta)) \quad \text{posons } w=iv \\ &= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-xs \cosh v} f(ix \sin(\theta-iv)) \\ &\sim \frac{1}{s} f(ix \sin \theta) e^{-xs} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\frac{xs}{2} v^2} \\ &\sim \frac{1}{s} f(ix \sin \theta) \sqrt{\frac{2\pi}{xs}} e^{-xs} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cette contribution tend vers zéro pour $s \rightarrow \infty$ comme $e^{-xs}/\sqrt{s}$. Elle ne contribue donc pas à la diffusion.

Etudions maintenant la contribution d'un pôle de f . Supposons que $f(q)$ a un pôle simple en $q = \alpha z$. Cherchons où ce pôle se manifeste dans le plan w . On a

$$z = -i \sin(w - \theta) \quad (3.27)$$

$$\text{d'où} \quad w = \theta + \operatorname{arcsin} iz = \theta + \alpha + i\beta$$

$$\text{ou bien} \quad z = \cos \alpha \operatorname{Sh} \beta - i \sin \alpha \operatorname{Ch} \beta \quad (3.28)$$

Supposons que α_0 et β_0 soit une solution de (3.28). On a alors deux suites de pôles dans le plan w :

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 & \alpha &= \alpha_0 + i\pi n \\ w &= \theta + \alpha + i\beta \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\beta = -\beta_0 \quad \alpha = \alpha_0 + i\pi n - \alpha_0$$

Il faut faire ici deux remarques. Premièrement les pôles se déplacent dans le plan w avec θ . Ceci implique qu'un pôle donné ne contribue que pour un certain domaine de variation de θ . Deuxièmement, pour z donné il y a un et un seul pôle des deux séries (3.29) qui contribue, notamment celui pour lequel $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Si l'on note c la contribution du pôle considéré à l'intégrale sur C_L , l'on a :

$$\text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \quad \text{contribution pour} \quad -\alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$c = \pi \lim_{w \rightarrow \theta + \alpha + i\beta} (w - \theta - \alpha - i\beta) f(-ix \sin(w - \theta)) e^{-xz \cos(\theta + \alpha + i\beta)} \quad (3.30)$$

pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

contribution pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < -\alpha$

$$c = -\pi \lim_{w \rightarrow \beta + i\beta} (w - \theta - \alpha - i\beta) f(-i\alpha \lim(w - \theta)) e^{-xs \cos(\theta + \alpha + i\beta)} \quad (3.30)$$

Remarquons que $\alpha=0$ ne peut intervenir; en effet, z serait réel et l'on aurait une singularité non intégrable sur le chemin original. D'autre part, $\alpha = i\frac{\pi}{2}$, correspondant à z imaginaire de module ≥ 1 , ne contribue pas.

Récrivons (3.30) sous une forme plus explicite. On posera par définition

$$\tilde{f}(x) = \lim_{w \rightarrow \beta + i\beta} (w - \theta - \alpha - i\beta) f(-i\alpha \lim(w - \theta)) \quad (3.31)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \quad -\alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad c = \pi \tilde{f}(x) e^{-xs (\cos(\theta + \alpha) \cosh \beta - i \sin(\theta + \alpha) \sinh \beta)}$$

(3.32)

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < -\alpha, \quad c = -\pi \tilde{f}(x) e^{-xs (\cos(\theta + \alpha) \cosh \beta - i \sin(\theta + \alpha) \sinh \beta)}$$

Ces ondes sont exponentiellement décroissantes dans la direction $\theta = -\alpha$ et se comportent comme des ondes planes perpendiculairement, la direction de propagation étant $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ pour $\beta > 0$ et $\theta = -\frac{\pi}{2} - \alpha$ pour $\beta < 0$.

Cas particuliers.

$$1^0 \quad \beta = 0 \quad z = -i \lambda \sin \alpha$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \quad -\alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad c = \pi \hat{f}(x z) e^{-x s \cos(\theta + \alpha)} \quad (3.33)$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < -\alpha, \quad c = -\pi \hat{f}(x z) e^{-x s \cos(\theta + \alpha)}$$

Cette forme est particulièrement appropriée pour les états liés

$$2^0 \quad \alpha = \pm \varepsilon, \quad z = S h \beta \mp i \varepsilon \sinh \beta \quad x z = q_0 \mp i \varepsilon \sqrt{x^2 + q_0^2}$$

$$\alpha = -\varepsilon, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad c = \pi \hat{f}(q_0) e^{-s(\sqrt{x^2 + q_0^2} \cos \theta - i q_0 \sin \theta)} \quad (3.34)$$

$$\alpha = \varepsilon, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0, \quad c = -\pi \hat{f}(q_0) e^{-s(\sqrt{x^2 + q_0^2} \cos \theta - i q_0 \sin \theta)}$$

Dans les variables (r, g) ces contributions prennent la forme

$$\alpha = -\varepsilon, \quad g > 0, \quad c = \pi \hat{f}(q_0) e^{-\sqrt{x^2 + q_0^2} |r| + i q_0 g} \quad (3.35)$$

$$\alpha = \varepsilon, \quad g < 0, \quad c = -\pi \hat{f}(q_0) e^{-\sqrt{x^2 + q_0^2} |r| + i q_0 g}$$

Ce sont ces formes qui donnent les ondes asymptotiques décrivant le mouvement d'une particule libre et d'un état lié des deux autres. Ces états seront entrant ou sortant suivant que:

	$q_0 > 0$	$q_0 < 0$
$\alpha = \varepsilon$	entrant	sortant
$\alpha = -\varepsilon$	sortant	entrant

Nous devons maintenant examiner le

Deuxième cas : $E = k^2 + i\varepsilon$, $k > 0$, $\varepsilon > 0$

$$F(r, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp dq \frac{e^{i(p r + q \varepsilon)}}{p^2 + q^2 - k^2 - i\varepsilon} f(q) \quad (3.36)$$

On peut de nouveau intégrer sur p par résidus. On obtient

$$F(r, \varepsilon) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{i(\sqrt{k^2 - q^2 + i\varepsilon} |r| + q\varepsilon)}}{\sqrt{k^2 - q^2 + i\varepsilon}} f(q)$$

où il faut prendre la première détermination de la racine, le plan complexe étant coupé selon l'axe réel positif.

En séparant l'intégrale en trois parties (de $-\infty$ à $-k$, de $-k$ à k et de k à ∞) et en faisant les changements de variables adéquats on obtient, en coordonnées polaires (3.22)

$$F(r, \varepsilon) = \frac{i}{2} \int_{\mathcal{C}} dw e^{iks \cos w} f(-k \sin(w - \delta)) \quad (3.37)$$

Le contour $\mathcal{C}$ étant défini dans la figure 3.3.

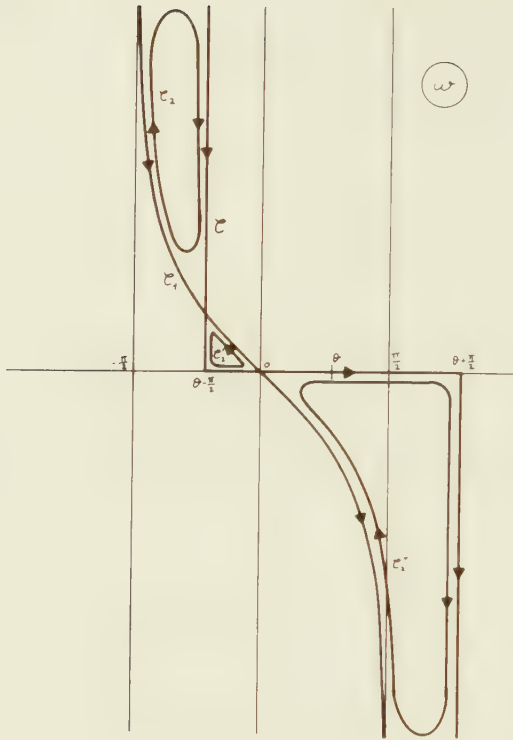


Fig. 3.3 Les différents chemins dans le plan w

On a de nouveau un col en $w=0$. Posons $w = u + iv$, alors

$$\begin{aligned}
 i \cos w &= i (\cos u \operatorname{Ch} v - i \sin u \operatorname{Sh} v) \\
 &= \sin u \operatorname{Sh} v + i \cos u \operatorname{Ch} v
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

Le chemin de plus grande pente est donné par l'une des solutions de

$$\operatorname{Im} i \cos w = 1$$

c'est - à - dire

$$\cosh v = \frac{1}{\cos u} \quad (3.39)$$

Pour que la partie réelle de (3.38) soit négative sur le chemin d'intégration, il faut prendre la solution de (3.39) pour laquelle u et v sont de signes opposés. On obtient ainsi le chemin $\mathcal{C}_1$ (Fig. 3.3). On peut alors calculer la contribution du col à l'intégrale (3.37) de la façon suivante

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int_{\mathcal{C}_1} dw e^{iks \cosh w} f(-k \sin(w-\theta)) \quad w = e^{-i\frac{\pi}{4}} u \\ & \sim \frac{i}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\eta}^{\eta} du e^{iks(1+i\frac{u^2}{2})} f(-k \sin(e^{-i\frac{\pi}{4}} u - \theta)) \\ & \sim \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} f(k \sin \theta) e^{iks} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ks}{2} u^2} du \\ & \sim \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} f(k \sin \theta) \sqrt{\frac{2\pi}{ks}} e^{iks} \quad (3.40) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une onde sphérique sortante. Par contre, on n'a pas d'onde sphérique entrante, ce qui est naturel puisque nous étudions la forme asymptotique d'un $\psi^{(+)}$.

Supposons maintenant que $f(q)$ a un pôle simple en $q = k\pi$. On aura des pôles dans le plan w pour w solution de

$$\sin(w - \theta) = -z \quad (3.41)$$

Posons de nouveau $w = \theta + \alpha + i\beta$, on obtient

$$\sin \alpha \operatorname{Ch} \beta + i \cos \alpha \operatorname{Sh} \beta = -z \quad (3.42)$$

On a de nouveau les deux suites de solutions (3.29). On remarque dans la figure 3.3 que le seul pôle donnant une contribution est celui qui satisfait l'une des deux relations suivantes :

$$\beta > 0 \text{ et } \delta - \frac{\pi}{2} < \alpha < \delta + \frac{\pi}{2} \quad (3.43)$$

$$\text{ou bien } \beta < 0 \text{ et } \delta - \frac{\pi}{2} < \alpha < \delta + \frac{\pi}{2}$$

où δ est donné par

$$\delta = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\operatorname{Ch} \beta} & \beta < 0 \\ -\arccos \frac{1}{\operatorname{Ch} \beta} & \beta > 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Cherchons maintenant la contribution d'un pôle (α, β) donné.

On a quatre possibilités:

$$1^{\circ} \quad \beta > 0 \quad \delta - \frac{\pi}{2} < \alpha < \delta + \frac{\pi}{2} \quad \text{contribution pour } \delta - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$C = \pi \int (k\pi) e^{ks \sin(\theta + \alpha) \operatorname{Sh} \beta + i ks \cos(\theta + \alpha) \operatorname{Ch} \beta} \quad (3.45)$$

2° $\beta > 0$ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \delta + \frac{\pi}{2}$ contribution pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \delta - \alpha$

$$C = -\pi \tilde{f}(kz) e^{ks \sin(\theta + \alpha) \operatorname{Sh} \beta + i k s \cos(\theta + \alpha) \operatorname{Ch} \beta}$$

3° $\beta < 0$ $\delta - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ contribution pour $\delta - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$C = \pi \tilde{f}(kz) e^{ks \sin(\theta + \alpha) \operatorname{Sh} \beta + i k s \cos(\theta + \alpha) \operatorname{Ch} \beta} \quad (3.45)$$

4° $\beta < 0$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \delta + \frac{\pi}{2}$ contribution pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \delta - \alpha$

$$C = -\pi \tilde{f}(kz) e^{ks \sin(\theta + \alpha) \operatorname{Sh} \beta + i k s \cos(\theta + \alpha) \operatorname{Ch} \beta}$$

où l'on a posé

$$\tilde{f}(kz) = \lim_{w \rightarrow \theta + \alpha + i\beta} (w - \theta - \alpha - i\beta) f(-k \sin(w - \theta)) \quad (3.46)$$

Les ondes qui nous intéressent plus particulièrement pour la diffusion sont d'une part celles décrivant une particule libre et un état lié à deux particules et, d'autre part, celles correspondant à trois particules libres. Les premières sont du type

$$e^{-\sqrt{q_0^2 - k^2} |r| + i q_0 z} = e^{\pm (-\sqrt{q_0^2 - k^2} \cos \theta + i q_0 \sin \theta)}$$

Il y a quatre possibilités, suivant que l'onde est entrante ou sortante et que q_0 est positif ou négatif.

a) $q_0 > 0$ onde sortante

$$\begin{aligned} k \operatorname{Ch} \beta &= q_0 & \alpha &= -\frac{\pi}{2} - \eta & -\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ k \operatorname{Sh} \beta &= \sqrt{q_0^2 - k^2} & k z &= q_0 + i \eta \sqrt{q_0^2 - k^2} \end{aligned}$$

b) $q_0 > 0$ onde entrante

$$\begin{aligned} k \operatorname{Ch} \beta &= q_0 & \alpha &= -\frac{\pi}{2} + \eta & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ k \operatorname{Sh} \beta &= \sqrt{q_0^2 - k^2} & k z &= q_0 - i \eta \sqrt{q_0^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

c) $q_0 < 0$ onde entrante

$$\begin{aligned} k \operatorname{Ch} \beta &= -q_0 & \alpha &= \frac{\pi}{2} - \eta & \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ k \operatorname{Sh} \beta &= -\sqrt{q_0^2 - k^2} & k z &= q_0 + i \eta \sqrt{q_0^2 - k^2} \end{aligned}$$

d) $q_0 < 0$ onde sortante

$$\begin{aligned} k \operatorname{Ch} \beta &= -q_0 & \alpha &= \frac{\pi}{2} + \eta & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ k \operatorname{Sh} \beta &= -\sqrt{q_0^2 - k^2} & k z &= q_0 - i \eta \sqrt{q_0^2 - k^2} \end{aligned}$$

Quant aux ondes décrivant trois particules libres ce sont des ondes planes

$$e^{i(p_0 r + q_0 S)} = e^{i k s \cos(\xi - r)}$$

avec $p_0 = k \cos r$ et $q_0 = k \sin r$.

Or les seules ondes que nous pouvons avoir au vu de (3.45) sont du type

$$e^{ikz} \cos(\theta + \alpha) \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Ceci entraîne que $\alpha = -\gamma$ et γ est aussi restreint à $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Seules les possibilités 2° et 3° de (3.45) subsistent ici :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \beta = \eta \quad & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \gamma \\ & kz = q_0 - i\eta P_0 \quad P_0 > 0 \\ & (3.48) \\ \text{b)} \quad \beta = -\eta \quad & \gamma \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ & kz = q_0 + i\eta P_0 \quad P_0 > 0 \end{aligned}$$

Avant de terminer ce paragraphe sur les formes asymptotiques des fonctions d'ondes, il faut remarquer que nous avons deux types d'ondes décrivant le mouvement de trois particules libres: les ondes sphériques (3.40) et les ondes planes décrites ci-dessus. En fait ces deux types correspondent à des processus physiques différents. Lors de la collision de trois particules libres, il peut se passer le processus séquentiel suivant: les particules 1 et 2 font une diffusion sur leur couche d'énergie, la particule 3 étant spectatrice, puis les particules 2 et 3 diffusent à leur tour, la particule 1 étant cette fois spectatrice, et ainsi de suite. Dans un tel processus il n'y a jamais d'interaction à trois particules et les ondes asymptotiques seront des ondes planes. Par contre, dès qu'il y a une interaction à trois corps, les impulsions se redistribuent de façon quelconque et l'onde asymptotique est sphérique. Ceci implique que les ondes planes

ne peuvent intervenir que dans le cas où les trois particules sont libres à l'entrée, en particulier elles ne peuvent pas intervenir dans un problème de fracture.

3.3 Solution du problème de trois masses et de trois potentiels égaux.

Nous allons maintenant résoudre les équations de Faddeev (3.18) dans la cas de trois masses égales et de trois potentiels égaux. Dans ce cas on a $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Nous nous intéresserons premièrement à la diffusion de la particule 3 sur l'état lié des particules 1 et 2. L'inhomogénéité (3.19) est alors

$$g^{(1)}(q) = g^{(2)}(q) = 0, \quad g^{(3)}(q) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi}} \delta(q - q_0) \quad (3.49)$$

Les équations (3.18) deviennent

$$f^{(1)}(q) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + q^2 - (E + i\epsilon)} \left[f^{(2)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}q\right) + f^{(3)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}q\right) \right]$$

$$f^{(2)}(q) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + q^2 - (E + i\epsilon)} \left[f^{(1)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}q\right) + f^{(3)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}q\right) \right] \quad (3.50)$$

$$f^{(3)}(q) = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi}} \delta(q - q_0) + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + q^2 - (E + i\epsilon)} \left[f^{(1)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}q\right) + f^{(2)}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}q\right) \right]$$

Etant donné l'unicité des solutions des équations de Faddeev, on montre facilement que

$$f^{(1)}(q) = f^{(2)}(q) \doteq f(q) \quad (3.51)$$

Posons d'autre part

$$h(q) = f^{(1)}(q) - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi}} \delta(q - q_0) \quad (3.52)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} f(q) = & \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi}} \frac{\sqrt{3}\lambda}{4\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{q_0^2 + q_0 q + q^2 - \frac{3}{4}(E + i\epsilon)} \\ & + \frac{\sqrt{3}\lambda}{4\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u^2 + u q + q^2 - \frac{3}{4}(E + i\epsilon)} [f(u) + h(u)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$h(q) = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u^2 + u q + q^2 - \frac{3}{4}(E + i\epsilon)} f(u)$$

avec $E = q_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}$

Du fait du changement de fonction (3.52), les fonctions f et h décrivent en fait l'onde diffusée. Ceci implique que f et h ne doivent pas avoir de contributions asymptotiques entrantes. D'autre part, puisqu'il s'agit de la diffusion d'une particule libre sur un état lié, on n'aura pas non plus de contribution du type (3.48).

On s'attend donc à ce que f et h aient des pôles pour :

$$q_0 > 0 \quad q = q_0 + i\eta \quad q = -q_0 - i\eta \quad (3.54)$$

$$q_0 < 0 \quad q = q_0 - i\eta \quad q = -q_0 + i\eta$$

D'autre part, le terme inhomogène suggère que l'on a aussi des pôles en

$$q = -\frac{1}{2} q_0 \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda}{2} \quad (3.55)$$

Supposons, pour l'instant, que l'on a $q_0 > 0$. On fait l'essai

$$f(q) = \frac{a_1}{q - q_0 - i\eta} + \frac{a_2}{q + q_0 + i\eta} + \frac{a_3}{q + \frac{1}{2}q_0 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} + \frac{a_4}{q + \frac{1}{2}q_0 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} \quad (3.56)$$

$$h(q) = \frac{b_1}{q - q_0 - i\eta} + \frac{b_2}{q + q_0 + i\eta} + \frac{b_3}{q + \frac{1}{2}q_0 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} + \frac{b_4}{q + \frac{1}{2}q_0 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}}$$

En introduisant cet essai dans les équations (3.53) on peut intégrer par les résidus. En tenant compte de

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \frac{\sqrt{E - q^2 - \frac{\lambda^2}{4}}}{q - q_0} = \lim_{q \rightarrow q_0} \frac{\sqrt{q_0^2 - q^2 - \frac{\lambda^2}{4}} - i\frac{\lambda}{2}}{q - q_0} = \frac{2iq_0}{\lambda} \quad (3.57)$$

et en exprimant le fait que les égalités obtenues sont valables quel que soit q , on obtient un système d'équations linéaires

pour les a_i et les b_i . Ce système est de rang 8 et, en posant

$$a_i = \sqrt{\frac{\lambda^3}{4\pi}} \frac{\lambda}{2\pi} a'_i \quad \text{et} \quad b_i = \sqrt{\frac{\lambda^3}{4\pi}} \frac{\lambda}{2\pi} b'_i \quad (3.58)$$

l'on obtient :

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} q_0 + i \frac{\lambda}{2}}{(q_0 - i \sqrt{3} \frac{\lambda}{2})(\sqrt{3} q_0 - i \frac{\lambda}{2})} & a'_2 &= 0 \\ a'_3 &= \frac{\sqrt{3} q_0 + i \frac{\lambda}{2}}{i \lambda (\sqrt{3} q_0 - i \frac{\lambda}{2})} & a'_4 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} q_0 + i \frac{\lambda}{2}}{i \lambda (q_0 - i \sqrt{3} \frac{\lambda}{2})} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$b'_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{q_0 - i \sqrt{3} \frac{\lambda}{2}} \quad b'_2 = 0$$

$$b'_3 = 0 \quad b'_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{q_0 - i \sqrt{3} \frac{\lambda}{2}}$$

En tenant compte de (3.52), (3.17) et (1.41) on peut écrire la solution de la diffusion de la particule 3 sur l'état lié des particules 1 et 2, pour $q_0 > 0$:

$$q_0 > 0$$

$$\begin{aligned} \psi_{3q_0}^{(+)}(p, q) = & \sqrt{\frac{\lambda^3}{4\pi}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p_1^2 + q_1^2 - (\epsilon + i\epsilon)} \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \delta(q_1 - q_0) \right. \\ & + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{q_1 - q_0 - i\eta} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2}}{(q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}q_0 - i\frac{\lambda}{2})} \left(\frac{1}{q_1 - q_0 - i\eta} + \frac{1}{q_1 - q_0 - i\eta} \right) \quad (3.60) \\ & + \frac{\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2}}{i\lambda(\sqrt{3}q_0 - i\frac{\lambda}{2})} \left(\frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} \right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2}}{i\lambda(q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})} \left(\frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} \right) \end{aligned}$$

Pour trouver la solution $\psi_{3q_0}^{(+)}$ pour $q_0 < 0$ il faut retourner aux équations (3.53). On constate que ces équations ne changent pas si l'on change simultanément les signes de q_0 et de q . Ainsi si $f_{q_0}(q)$ et $h_{q_0}(q)$ sont des solutions de (3.53) pour q_0 alors $f_{-q_0}(-q)$ et $h_{-q_0}(-q)$ sont des solutions pour $-q_0$. On vérifie alors, sur la forme asymptotique, que l'on a

$$q_0 < 0 \quad \psi_{3q_0}^{(+)}(p, q) = \psi_{3-q_0}^{(+)}(p, -q) \quad (3.61)$$

Les fonctions d'onde $\psi_{1q_0}^{(+)}$ et $\psi_{2q_0}^{(+)}$ décrivant la diffusion de la particule 1 sur l'état lié $(1,3)$ et de la particule 2 sur l'état lié $(1,3)$ respectivement s'obtiennent de (3.60) et (3.61) par simple permutation des indices.

Avant de passer au problème des états liés, il est intéressant de regarder ce que devient la solution (3.60) lorsqu'on la prolonge pour des valeurs négatives de q_0 . En considérant les formes asymptotiques décrites plus haut, on constate, en regardant par exemple (3.47), que changer le signe de q , revient à transformer les ondes sortantes en ondes entrantes et vice versa, ou, autrement dit, à changer le sens de propagation des ondes planes. Toutefois on ne peut pas conclure de ces remarques que l'extension de la solution (3.60) à $q_0 < 0$ est un état du type (-). En effet, la contribution asymptotique (3.40) donnerait toujours des ondes sphériques sortantes. En fait on vérifie que l'on a :

$$q_0 < 0 : \quad \psi_{3q_0}^{(+)} = \frac{i\lambda (\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2})}{\sqrt{3}(q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}q_0 - i\frac{\lambda}{2})} \left(\psi_{1q_0}^{(+)} + \psi_{2q_0}^{(+)} \right) + \frac{\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{3}(q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})} \psi_{3q_0}^{(+)} \quad (3.62)$$

Etats liés.

On sait que la fonction d'onde d'un état lié, s'il en existe un, satisfait les équations de Faddeev homogènes. Dans ce cas on montre facilement que

$$f^{(1)}(q) = f^{(2)}(q) = f^{(3)}(q) = f(q) \quad (3.63)$$

et que f satisfait l'équation

$$f(q) = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{E - q^2}}{\sqrt{E - q^2} - i\frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u^2 + uq + q^2 - \frac{3}{4}E} f(u) \quad (3.64)$$

Cette équation est une équation aux valeurs propres pour E . De plus, on sait que l'énergie de l'état lié doit être inférieure à l'énergie du seuil de réaction

$$E_B < -\frac{\lambda^2}{4} \quad (3.65)$$

Pour obtenir la solution de (3.64) nous partirons de la solution de diffusion (3.60) étendue aux valeurs complexes de q . On a la relation

$$E = q_0^2 - \frac{\lambda^2}{4} \quad (3.66)$$

Ainsi la valeur de q correspondant à un état lié devra être imaginaire pure. D'autre part, puisque la fonction d'onde d'un état lié satisfait des équations homogènes, il faut annuler le coefficient de l'onde incidente. Il y a deux façons d'obtenir une fonction d'onde ayant les caractéristiques cherchées. On calcule que, premièrement :

$$\lim_{q_0 \rightarrow i \frac{\lambda}{2}} (\sqrt{3} q_0 - i \frac{\lambda}{2}) \psi_{3q_0}^{(+)}(p, q) = 0 \quad (3.67)$$

et deuxièmement :

$$\begin{aligned} \psi_B(p, q) &= \lim_{q_0 \rightarrow i \frac{\lambda}{2}} (q_0 - i \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda) \bar{\psi}_{3q_0}^{(+)}(p, q) \\ &= \frac{A}{p^2 + q^2 + \lambda^2} \left(\frac{1}{q_1^2 + \frac{3}{4} \lambda^2} + \frac{1}{q_1^2 + \frac{3}{4} \lambda^2} + \frac{1}{q_1^2 + \frac{3}{4} \lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

où A est la constante de normalisation.

On a donc un seul état lié pour l'énergie $E_B = -\lambda^2$.

On peut vérifier par un calcul explicite que les fonctions (3.60) et (3.68) sont bien les transformées de Fourier des solutions données par McGuire dans l'espace de configuration [McG 64]. Toutefois ce calcul est plus fastidieux qu'intéressant et nous ne le reproduirons pas ici.

3.4 Remarques sur le cas général.

Pratiquement tous les efforts que nous avons faits pour trouver des solutions dans le cas de masses et de potentiels différents ont échoués. Il nous faut par conséquent dire quelques mots des difficultés du problème.

Lorsque l'on considère les équations (3.18) on est troublé par la présence de coupures provenant de l'amplitude de diffusion à deux corps. Dodd le premier [Dod 70] a remarqué que ces coupures étaient exactement compensées par des termes semblables dans l'amplitude de diffusion à trois corps dans le cas de trois masses et de trois potentiels égaux. Notre point de vue des fonctions d'onde semble montrer qu'une telle compensation peut subsister dans le cas général. En effet, si l'on admet l'hypothèse 3.1, on constate que des termes contenant des $\sqrt{E-Q^2}$ seront toujours fournis par les résidus des pôles du propagateur. Nous voyons essentiellement deux difficultés. Premièrement la localisation des pôles des fonctions $\psi^{(1)}$ nous est à priori inconnue. Seuls les pôles correspondant à des ondes asymptotiquement entrantes ou sortantes sont bien connus. Deuxièmement les fonctions figurant au numérateur des termes de pôles peuvent être des fonctions analytiques arbitraires et la grande simplicité, mais aussi le peu d'intérêt, des solutions obtenues dans le cas de masses et de potentiels égaux réside dans le fait que ces fonctions se réduisent à des constantes.

3.5 Un cas particulier d'état lié.

Les solutions des équations (3.18) doivent présenter une certaine continuité en fonction des paramètres (potentiels λ_i et angles, c'est-à-dire masses). Partant de cette idée, nous avons essayé d'étendre la solution d'état lié au cas où seules les particules 1 et 2 sont semblables. Dans ce cas $\alpha = \beta$ et $\gamma = \pi - 2\alpha$ (voir fig. 3.1), d'autre part nous poserons $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et $\lambda_3 = \mu$. On aura de nouveau

$$f^{(4)}(q) = f^{(2)}(q) \stackrel{d}{=} f(q) \quad (3.69)$$

et $f^{(3)}(q) \stackrel{d}{=} g(q)$

Les équations (3.18) deviennent alors

$$f(q) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{E-q^2}}{\sqrt{E-q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+q^2-E} [f(-x \sin 2\alpha + q \cos 2\alpha) + g(x \sin \alpha - q \cos \alpha)] \quad (3.70)$$

$$g(q) = \frac{\mu}{\pi} \frac{\sqrt{E-q^2}}{\sqrt{E-q^2} - i \frac{\lambda}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+q^2-E} f(x \sin \alpha - q \cos \alpha)$$

Nous avons découvert que l'on obtient une solution, qui est une extension très simple de (3.68), à condition que λ , μ et α satisfassent la relation

$$\mu = - \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \lambda \quad (3.71)$$

En tenant compte que $\tan \alpha = \left(\frac{2m+m_1}{m_1} \right)^{1/2}$, $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, ou $m = m_1 = m_2$ et de la relation (1.7), (3.71) se traduit par la relation suivante entre les véritables potentiels :

$$\overline{\lambda}_3 = \frac{2m}{m+m_3} \overline{\lambda}_1 \quad (3.72)$$

On obtient alors

$$f(q) = \frac{1}{q^2 + \frac{\lambda^2}{4} \tan^2 \alpha} \quad (3.73)$$

$$g(q) = - \frac{2 \cos 2\alpha}{q^2 + \lambda^2 \sin^2 \alpha}$$

Avec l'énergie de liaison

$$E_B = - \frac{\lambda^2}{4 \cos^2 \alpha} \quad (3.74)$$

Ce qui donne pour la fonction d'onde totale :

$$\psi_B(p, q) = \frac{A}{p^2 + q^2 + \frac{\lambda^2}{4 \cos^2 \alpha}} \left\{ -2 \cos 2\alpha \left(\frac{1}{q_1^2 + \lambda^2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{q_2^2 + \lambda^2 \sin^2 \alpha} \right) + \frac{1}{q_3^2 + \frac{\lambda^2}{4} \tan^2 \alpha} \right\} \quad (3.75)$$

Dans l'espace de configuration cette fonction d'onde est représentée dans chaque secteur par une surface réglée décroissant exponentiellement, les courbes de niveau ayant l'allure donnée dans la figure 3.4.

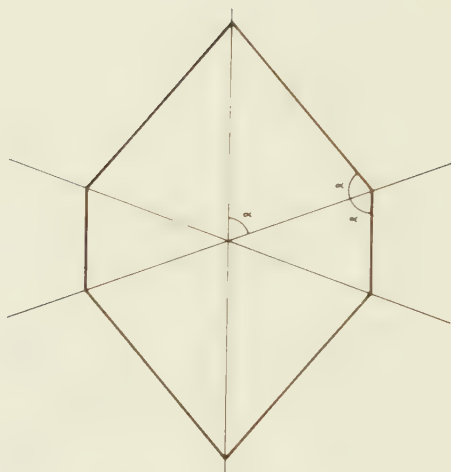


Fig. 3.4 Allure des courbes de niveau.

Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'essayer de trouver les solutions de diffusion dans ce cas. Remarquons, en passant, que, vu la complexité des calculs, il serait indispensable d'avoir à disposition un programme de manipulations algébriques formelles.

Chapitre 4

Matrice S .

Bien que les fonctions d'onde contiennent toute l'information concernant la diffusion, celle-ci n'y est pas apparente. Comme on le voit dans l'appendice C, l'information directe sur la diffusion est donnée par les éléments de matrice de l'opérateur S . Il faut signaler ici que dans le problème à trois corps, comme dans tout problème à plusieurs canaux, il n'existe pas d'opérateur S global, mais un ensemble d'opérateurs S_{ab} où a et b représentent les différents canaux. Mais ces opérateurs, ainsi que leurs éléments de matrice, peuvent être rangés dans une supermatrice et, par abus de langage, on continue à parler de matrice S .

Dans le cas que nous avons traité, les éléments de matrice s'obtiennent très facilement à partir des formes asymptotiques des fonctions d'onde de diffusion; en effet ils sont donnés par le rapport des coefficients des ondes sortantes au coefficient de l'onde entrante.

Dans ce chapitre nous allons donner les matrices S correspondant aux cinq situations suivantes :

- trois particules discernables
- trois bosons identiques
- trois fermions identiques
- deux bosons identiques
- deux fermions identiques.

4.1 Trois particules discernables.

Dans ce cas il y a quatre canaux, que l'on peut numéroté ainsi:

- 0 : trois particules libres
- 1 : particules 2 et 3 liées
- 2 : particules 1 et 3 liées
- 3 : particules 1 et 2 liées

La matrice S sera donc formée de 16 blocs que nous pouvons ordonner de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} S_{11}(q'_0, q_0) & S_{12}(q'_0, q_0) & S_{13}(q'_0, q_0) & S_{01}(\theta', q_0) \\ S_{12}(q'_0, q_0) & S_{22}(q'_0, q_0) & S_{23}(q'_0, q_0) & S_{02}(\theta', q_0) \\ S_{13}(q'_0, q_0) & S_{23}(q'_0, q_0) & S_{33}(q'_0, q_0) & S_{03}(\theta', q_0) \\ S_{10}(q'_0, \theta) & S_{20}(q'_0, \theta) & S_{30}(q'_0, \theta) & S_{00}(\theta', \theta) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où q_0 désigne l'impulsion relative de la particule libre et de l'état lié et θ désigne la direction de l'onde plane décrivant les trois particules libres. Les éléments S_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ sont eux-mêmes des matrices 2×2 , suivant les signes de q_0 et q'_0 . On dira que les S_{ii} représentent les diffusions élastiques, les S_{ij} , $0 \neq i, j \neq 0$, les processus d'échange, les S_{i0} les processus de formation et les S_{0i} les processus de fracture. Il va de soi que, pour des énergies négatives $q_0^2 < \frac{\lambda^2}{4}$, le canal décrivant trois particules libres est fermé et que dans ce cas la matrice S se réduit à la sous-matrice formée par les S_{ij} , $i \neq 0, j \neq 0$. Pour calculer les différents éléments de matrice reprenons la fonction $\psi_{3q_0}^{(4)}$ (3.60). En utilisant le fait que

$$\delta(u) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{1}{u-i\eta} - \frac{1}{u+i\eta} \right) \quad (4.2)$$

on peut écrire la solution $\psi_{3q_0}^{(*)}$ sous la forme

$$\begin{aligned} q_0 > 0 \quad \psi_{3q_0}^{(*)}(p, q) = & \sqrt{\frac{\lambda^3}{4\pi}} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{p^2 + q^2 - (E + iE)} \left\{ -\frac{1}{i\lambda} \frac{1}{q_3 - q_0 + i\eta} \right. \\ & + \left(\frac{1}{i\lambda} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{q_0 - i\sqrt{3} \frac{\lambda}{2}} \right) \frac{1}{q_3 - q_0 - i\eta} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{q_0 - i\sqrt{3} \frac{\lambda}{2}} \frac{1}{q_3 + \frac{1}{2}q_0 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{2}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2}}{(q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}q_0 - i\frac{\lambda}{2})} \left(\frac{1}{q_1 - q_0 - i\eta} + \frac{1}{q_1 - q_0 - i\eta} \right) \quad (4.3) \\ & + \frac{\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2}}{i\lambda(\sqrt{3}q_0 - i\frac{\lambda}{2})} \left(\frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2}} \right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}q_0 + i\frac{\lambda}{2}}{i\lambda(q_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})} \left(\frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 + i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{2}q_0 + i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2}} \right) \end{aligned}$$

Posons

$$S_{i,j}(q_0', q_0) = \begin{pmatrix} S_{i,j}(K_0, ++) & S_{i,j}(K_0, -+) \\ S_{i,j}(K_0, +-) & S_{i,j}(K_0, --) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

avec $K_0 = |q_0|$

En utilisant les formes asymptotiques (3.35) et (3.47), suivant que $E = K_0 - \frac{\lambda^2}{4}$ est négatif ou positif, on obtient directement les éléments de matrice

$$S_{33}(K_0,++) = 1 + \frac{2i\lambda}{\sqrt{3}(K_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})}$$

$$S_{33}(K_0,-+) = 0$$

(4.5)

$$S_{13}(K_0,++) = S_{23}(K_0,++) = \frac{i\lambda(\sqrt{3}K_0 + i\frac{\lambda}{2})}{\sqrt{3}(K_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}K_0 - i\frac{\lambda}{2})}$$

$$S_{13}(K_0,-+) = S_{23}(K_0,-+) = 0$$

Pour $q_0 < 0$ on obtient en partant de (3.61)

$$S_{i3}(K_0,--) = S_{i3}(K_0,--)$$

(4.6)

et $S_{i3}(K_0,+-) = S_{i3}(K_0,-+) = 0$

D'autre part, puisque l'on obtient les $\psi_{i,q_0}^{(i)}$ par permutation des indices sur $\psi_{i,q_0}^{(i)}$, on obtient immédiatement que :

$$S_{11} = S_{22} = S_{33}$$

(4.7)

et $S_{12} = S_{21} = S_{31} = S_{13} = S_{23} = S_{32}$

Pour $E > 0$ on peut encore calculer les amplitudes de fracture S_{0i} . Pour ce faire il faut, en vertu de (3.40), remplacer dans (4.3) q_3 par $k \sin \theta$, q_2 par $k \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})$ et q_1 par $k \sin(\theta - \frac{2\pi}{3})$. Le calcul ne présente aucune difficulté mais il est particulièrement ennuyeux. Comme on le sait déjà depuis le travail de McGuire [McG 64] on trouve que

$$S_{0i} = 0 \quad (4.8)$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de fracture.

Comme nous n'avons pas calculé la fonction de diffusion pour trois particules libres à l'entrée, nous ne pouvons pas calculer $S_{00}(\theta', \theta)$. Toutefois on sait [McG 64] que cette diffusion est constituée uniquement de processus séquentiels, dans lesquels interviennent au plus trois diffusions à deux corps (sur leur couche d'énergie, la troisième particule étant spectatrice). Les conditions cinématiques pour de tels processus montrent que

$$S_{00}(\theta', \theta) = 0 \text{ sauf si } \theta' = -\theta, -\theta + \frac{2\pi}{3}, -\theta - \frac{2\pi}{3}, \theta + \pi, \theta + \frac{\pi}{3}, \theta - \frac{\pi}{3} \quad (4.9)$$

Enfin il n'y a pas non plus de processus de formation :

$$S_{i0} = 0 \quad (4.10)$$

En résumé la matrice S s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|c}
 1+a & 0 & b & 0 & b & 0 & 0 \\
 0 & 1+a & 0 & b & 0 & b & 0 \\
 \hline
 b & 0 & 1+a & 0 & b & 0 & 0 \\
 0 & b & 0 & 1+a & 0 & b & 0 \\
 \hline
 b & 0 & b & 0 & 1+a & 0 & 0 \\
 0 & b & 0 & b & 0 & 1+a & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{00}
 \end{array} \right) \quad (4.11)$$

avec
$$a = \frac{2i\lambda}{\sqrt{3}(K_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})}$$

$$b = \frac{i\lambda (\sqrt{3}K_0 + i\frac{\lambda}{2})}{\sqrt{3}(K_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}K_0 - i\frac{\lambda}{2})}$$

On vérifie que cette matrice est unitaire. Etant donnée sa structure, le bloc supérieur gauche et le bloc S_{00} sont chacun unitaire et, de plus, on constate que le bloc 6×6 est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1+a & b & b \\ b & 1+a & b \\ b & b & 1+a \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \quad (4.12)$$

On peut donc se restreindre à étudier la matrice 3×3 ci-dessus.

Nous avons représenté les éléments de matrice S , en fonction de l'énergie cinétique $E_c = K_0^2$, dans la figure 4.1.

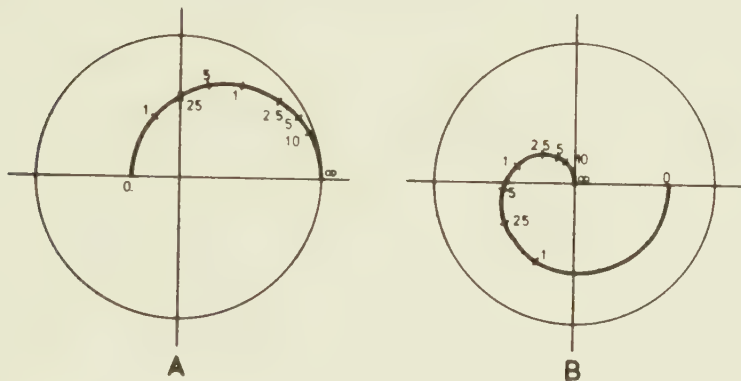


Fig. 4.1 Les éléments de matrice S en fonction de l'énergie cinétique $E_c = K_0^2$ un unité de λ^2

A : diffusion élastique : $1+a$

B : échange : b

On peut diagonaliser la matrice (4.12). On obtient les trois valeurs propres :

$$J_1 = 1+a+2b = \frac{(K_0 + i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}K_0 + i\frac{\lambda}{2})}{(K_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}K_0 - i\frac{\lambda}{2})} \quad (4.13)$$

$$J_2 = J_3 = 1+a-b = \frac{\sqrt{3}K_0 + i\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{3}K_0 - i\frac{\lambda}{2}}$$

La matrice de diagonalisation est

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Dans la figure 4.2 nous avons représenté les valeurs propres λ_1 et λ_2 , en fonction de l'énergie cinétique $E_c = K_0^2$.

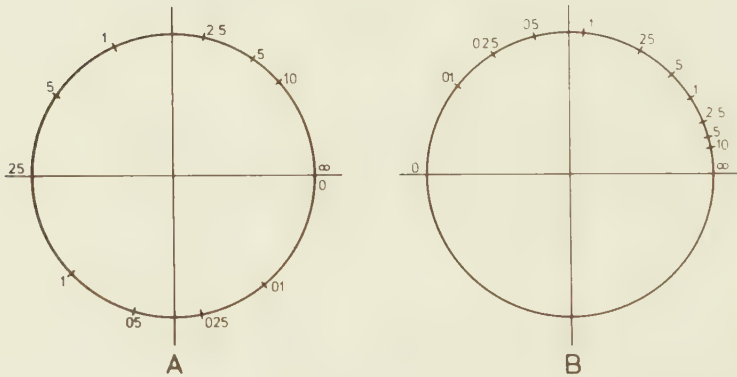


Fig. 4.2 Les valeurs propres de S en fonction de l'énergie cinétique $E_c = K_0^2$ en unité de λ^2
A : $\lambda_1 = 1 + a + 2b$
B : $\lambda_1 = 1 + a - b$

Remarquons que l'on a bien $|\lambda_i| = 1$, comme l'implique l'unitarité de S . De plus, dans le cas A, l'interaction est maximale au seuil de fracture $E_c / \lambda^2 = \frac{1}{4}$.

4.2 Trois bosons identiques.

La fonction d'onde décrivant la diffusion de trois bosons est associée à la représentation triviale du groupe S_3 . Etant donné que la fonction $\psi_{3_{1^3}}^{(1)}$ est paire par rapport à l'échange des particules 1 et 2, on aura simplement

$$\psi_{(38)q_0}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_{1_{1^3}}^{(1)} + \psi_{2_{q_0}}^{(1)} + \psi_{3_{q_0}}^{(1)} \right) \quad (4.15)$$

On obtient donc exactement le mélange de canaux donné par la première ligne de la matrice de diagonalisation (4.14) et la matrice S sera dans ce cas

$$S_{38} = 1 + a + 2b = \frac{(K_0 + i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}K_0 + i\frac{\lambda}{2})}{(K_0 - i\sqrt{3}\frac{\lambda}{2})(\sqrt{3}K_0 - i\frac{\lambda}{2})} \quad (4.16)$$

Rappelons que cet élément de matrice est représenté dans la figure 4.2 A.

On peut se convaincre facilement, à l'aide des développements présentés à la fin du chapitre 2, en particulier des relations (2.12), que les deux autres mélanges de canaux donnés par la matrice (4.14) correspondent à des particules dont les fonctions d'onde se transforment sous la représentation D^2 , à deux dimensions, de S_3 .

4.3 Trois fermions identiques.

La fonction d'onde décrivant la diffusion de trois fermions est associée à la représentation alternée du groupe S_3 . C'est dire qu'elle doit être impaire par rapport à l'échange de n'importe quel couple de particules. Ainsi, dans l'espace de configuration, la fonction d'onde doit être nulle sur le support des potentiels.

Le saut de la dérivée normale étant proportionnel à la valeur de la fonction, on conclut que la fonction d'onde est continuellement différentiable, et solution de l'équation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2) \psi_{3F} = 0 \quad (4.17)$$

Ainsi ψ_{3F} sera égale à la fonction d'onde incidente

$$\psi_{3F} = \phi_0 \quad (4.18)$$

En particulier $\psi_{3F} = 0$ pour $E < 0$. Le seul cas où la fonction d'onde n'est pas nulle est celui de trois particules libres incidentes et dans ce cas elles n'interagissent jamais.

4.4 Deux particules identiques.

Dans ce paragraphe nous considérons que les particules 1 et 2 sont identiques. Nous devons distinguer deux cas suivant que ces particules sont des bosons ou des fermions.

Deux bosons.

Les fonctions d'onde doivent être paires par rapport à l'échange des particules 1 et 2. Il y a deux états asymptotiques possibles:

1° les particules 1 et 2 sont liées, la fonction d'onde est

$$\psi_{(12)Bq_0}^{(4)} = \psi_{3q_0}^{(4)} \quad (4.19)$$

2° la particule 3 est liée avec l'une des deux autres. La fonction d'onde est

$$\Psi_{(3,12)B_{q_0}}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{1q_0}^{(+)} + \Psi_{2q_0}^{(+)} \right) \quad (4.20)$$

Deux fermions.

Dans ce cas les fonctions d'onde doivent être impaires par rapport à l'échange des particules 1 et 2. Comme il n'y a pas d'état lié de deux fermions avec un potentiel en puits δ , il n'y a qu'un état asymptotique; la fonction d'onde correspondante est :

$$\Psi_{(3,12)F_{q_0}}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{1q_0}^{(+)} - \Psi_{2q_0}^{(+)} \right) \quad (4.21)$$

Les trois fonctions (4.19 - 20 - 21) sont orthogonales et l'on obtient la matrice S pour les deux cas en effectuant la transformation :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & b & b \\ b & 1+a & b \\ b & b & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & 1+a+b & 0 \\ 0 & 0 & 1+a-b \end{pmatrix} \quad (4.22) \end{aligned}$$

L'élément de matrice décrivant l'échange et celui décrivant la diffusion élastique $(3,12)B \rightarrow (3,12)B$ sont représentés, en fonction de l'énergie cinétique $E_c = K_0^2$, dans la figure 4.3. Quant à l'élément de matrice décrivant la diffusion élastique $(12)B \rightarrow (12)B$ on le trouve dans la figure 4.1 A et celui décrivant la diffusion élastique pour deux fermions dans la figure 4.2 B.

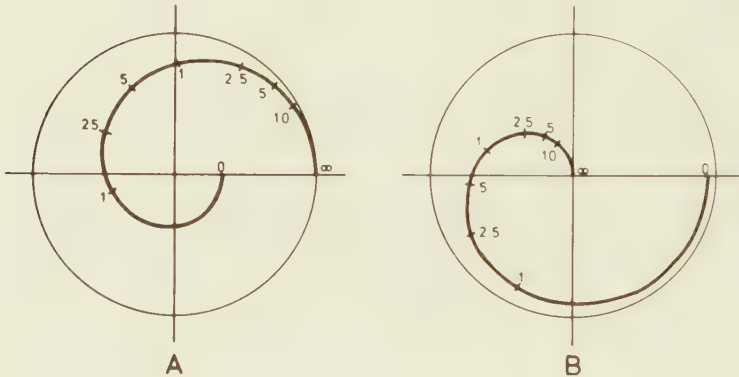


Fig. 4.3 Eléments de matrice $\bar{S}$ en fonction de l'énergie cinétique $E_c = K_0^2$ en unité de λ^2
A : diffusion élastique $(3,12)B \rightarrow (3,12)B : a+b$
B : échange : $\sqrt{b}$

En résumé on a pour

- Deux bosons :

$$S_{(12)B \rightarrow (12)B} = \frac{\sqrt{K_0 + i\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{K_0 - i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}}$$

(4.23)

$$S_{(3,12)B \rightarrow (12)B} = S_{(12)B \rightarrow (3,12)B} = \frac{\sqrt{2} i \lambda (\sqrt{K_0 + i\frac{\lambda}{2}})}{\sqrt{K_0 - i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} (\sqrt{K_0 - i\frac{\lambda}{2}})}$$

$$S_{(3,12)B \rightarrow (3,12)B} = \frac{(\sqrt{3} K_0 + i \frac{\lambda}{2})^2}{\sqrt{3} (K_0 - i \sqrt{3} \frac{\lambda}{2}) (\sqrt{3} K_0 - i \frac{\lambda}{2})} \quad (4.23)$$

- Deux fermions

$$S_{(3,12)F \rightarrow (3,12)F} = \frac{\sqrt{3} K_0 + i \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{3} K_0 - i \frac{\lambda}{2}} \quad (4.24)$$

En guise de conclusion.

Bien que nous n'ayons que peu de résultats nouveaux, nous pensons avoir montré que le fait de s'intéresser aux fonctions d'onde, plutôt qu'à l'opérateur de diffusion directement, présente plusieurs avantages. Premièrement, notre intuition est beaucoup mieux à même de saisir les processus physiques élémentaires intervenant dans le modèle, grâce à l'étude des formes asymptotiques des fonctions d'onde. D'autre part, pour le cas des particules identiques, il est facile de tenir compte des propriétés de symétrie des fonctions d'onde, sans symétriser directement les équations. Nous profitons de mentionner ici que les différentes amplitudes pour des particules identiques, que nous avons données dans le chapitre 4, ne se trouvent pas, à notre connaissance, dans la littérature. Quant à la suite qui pourrait être donnée à ce travail, nous pensons qu'il faut particulièrement mettre l'accent sur les points suivants.

Premièrement, on peut espérer obtenir les solutions de diffusion dans le cas où les masses et les potentiels satisfont la relation (3.71). Il n'est pas certain que ce cas conduise à une amplitude de fracture non nulle, mais il a l'avantage d'introduire un seuil inélastique différent du seuil de réaction. Toutefois, comme nous l'avons mentionné à la fin du chapitre 3, il serait nécessaire d'avoir à disposition un langage de manipulations algébriques tel que FORMAC ou SYMBAL.

Une extension plus immédiate de ce travail consisterait en la comparaison des résultats exacts obtenus avec ceux fournis par certaines approximations. Il serait intéressant d'inclure dans une telle étude les résultats récents de McGuire et Hurst [McG 72], qui ont résolu, de façon générale, le problème unidimensionnel de trois particules impenétrables avec interaction de contact.

Appendice A

Transformation de coordonnées.

Considérons trois particules de masses m_i , de coordonnées x_i , et d'impulsions k_i ($i = 1, 2, 3$). Introduisons de nouvelles coordonnées en posant:

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{2}{\Pi} \right)^{1/2} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \\ r_3 &= \left(\frac{2 m_1 m_2}{\Pi_3} \right)^{1/2} (x_2 - x_1) \\ g_3 &= \left(\frac{2 m_3 \Pi_3}{\Pi} \right)^{1/2} \left(x_3 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{\Pi_3} \right) \\ \Pi &= m_1 + m_2 + m_3, \quad \Pi_3 = m_1 + m_2 \end{aligned} \tag{A.-1}$$

On tire aisément les relations inverses:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{2\Pi} \right)^{1/2} R - \left(\frac{m_3}{2\Pi_3\Pi} \right)^{1/2} g_3 - \left(\frac{m_2}{2m_1\Pi_3} \right)^{1/2} r_3 \\ x_2 &= \left(\frac{1}{2\Pi} \right)^{1/2} R - \left(\frac{m_3}{2\Pi_3\Pi} \right)^{1/2} g_3 + \left(\frac{m_1}{2m_2\Pi_3} \right)^{1/2} r_3 \\ x_3 &= \left(\frac{1}{2\Pi} \right)^{1/2} R + \left(\frac{\Pi_3}{2m_3\Pi} \right)^{1/2} g_3 \end{aligned} \tag{A.-2}$$

L'énergie cinétique s'écrit dans ces coordonnées:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) \\ &= \frac{1}{4} (\dot{R}^2 + \dot{g}_3^2 + \dot{r}_3^2) \end{aligned} \tag{A.-3}$$

Introduisons les moments conjugués $\mathfrak{x} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$:

$$K = \frac{1}{2} R \left(\frac{1}{m_1} \right)^{1/2} (k_1 + k_2 + k_3)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} r_2^2 \left(\frac{1}{2 m_2 n_2} \right)^{1/2} (r_1 r_2 - m_2 (k_1 + k_2)) \quad (A.-4)$$

$$q_3 = \frac{1}{2} q_3^2 \left(\frac{1}{2 m_3 n_3} \right)^{1/2} (r_1 r_2 - m_3 (k_1 + k_2))$$

A un facteur près, R est la coordonnée et K l'impulsion du centre de masse, r_3 la coordonnée et p_3 l'impulsion relative des particules 1 et 2 dans leur centre de masse, q_3 la coordonnée et q_3 l'impulsion relative de la particule 3 et du sous-système (1,2). Cet ensemble de variables convient bien lorsque le sous-système (1,2) est distingué (par exemple lorsqu'il est lié). On peut introduire des variables analogues par permutation circulaire des indices dans (A.-1) et (A.-4), dans le cas où l'on veut distinguer les sous-systèmes (2,3) et (3,1).

Remarquons que, dans ces variables, l'énergie cinétique prend une forme particulièrement simple:

$$T = K^2 + p_3^2 + q_3^2 \quad \propto \frac{1}{2 m_1 m_2 m_3} \quad (A.-5)$$

On a d'autre part les relations:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = A_{1\beta} \begin{pmatrix} r_\beta \\ q_\beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = A_{\alpha 1} \begin{pmatrix} p_\alpha \\ q_\alpha \end{pmatrix} \quad (A.-6)$$

où

$$A_{1\beta} = A_{\beta 1} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{m_1}{n_1} \frac{m_\beta}{n_\beta}\right)^{1/2} & \left(\frac{m_1}{n_1} \frac{n_\beta}{n_1}\right)^{1/2} \\ -\left(\frac{m_1}{n_1} \frac{n_\beta}{n_1}\right)^{1/2} & -\left(\frac{m_1}{n_1} \frac{m_\beta}{n_\beta}\right)^{1/2} \end{pmatrix}$$

Les autres matrices se déduisent de celle-ci par permutation circulaire des indices.

Il faut remarquer que ces transformations sont orthogonales, et que les différents repères sont simplement tournés d'un angle α_{ij} l'un par rapport à l'autre. On a

$$\cos \alpha_{ij} = - \left(\frac{m_i m_j}{\Pi_i \Pi_j} \right)^{1/2}$$

(A.-7)

$$\sin \alpha_{ij} = \left(\frac{m_k \Pi}{\Pi_i \Pi_j} \right)^{1/2}$$

On a $\frac{\pi}{2} \leq \alpha_{ij} \leq \pi$ et $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} = 2\pi$.

La figure A.1 montre la disposition relative des différents repères pour le cas $m_1 < m_2 < m_3$.

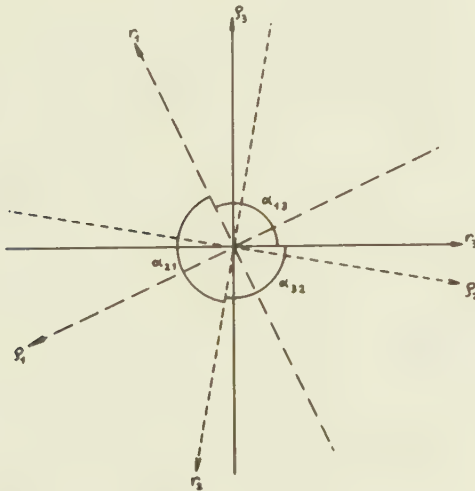


Fig. A.1 Disposition relative des différents repères pour $m_1 (=1) < m_2 (=3) < m_3 (=8)$

Appendice B

Le problème à deux corps avec potentiel δ

Considérons le problème à une dimension de deux particules de masses m_1 et m_2 , de coordonnées x_1 et x_2 et d'impulsions k_1 et k_2 , interagissant par un potentiel $V(x_1, x_2) = -\bar{\lambda} \delta(x_1 - x_2)$.

L'équation de Schrödinger correspondante est:

$$\left[-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \bar{\lambda} \delta(x_1 - x_2) \right] \Xi(x_1, x_2) = E' \Xi(x_1, x_2) \quad (B.-1)$$

Introduisons de nouvelles coordonnées, correspondant à celles de l'appendice A pour le problème à trois corps.

$$R = \left(\frac{2}{\Pi} \right)^{1/2} (m_1 x_1 + m_2 x_2) \quad r = \left(\frac{2m_1 m_2}{\Pi} \right)^{1/2} (x_1 - x_2) \quad (B.-2)$$

$$K = \left(\frac{1}{\Pi} \right)^{1/2} (k_1 + k_2) \quad P = \left(\frac{1}{2m_1 m_2 \Pi} \right)^{1/2} (m_1 k_1 - m_2 k_2)$$

L'équation de Schrödinger devient alors:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial K^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \left(\frac{2m_1 m_2}{\Pi} \right)^{1/2} \bar{\lambda} \delta(r) \right] \Xi(R, r) = E' \Xi(R, r) \quad (B.-3)$$

Posons $\Xi(R, r) = e^{iKR} \Psi(r)$ pour éliminer le mouvement du centre de masse. On obtient:

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \lambda \delta(r) \right] \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (B.-4)$$

où l'on a posé: $\lambda = \left(\frac{2m_1 m_2}{\Pi} \right)^{1/2} \bar{\lambda}$ et $E = E' - K^2$

Considérons cette dernière équation pour $E = k^2 > 0$. En dehors de l'origine, support du potentiel, elle se réduit à

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) \psi(r) = 0 \quad (\text{B.-5})$$

Ainsi l'espace est divisé en deux parties, gauche et droite, dans lesquelles ψ est une superposition de deux ondes planes e^{ikr} et e^{-ikr} . D'autre part, on sait que la dérivée au sens des distributions d'une fonction ayant une discontinuité de première espèce en $x = x_0$, est égale à sa dérivée comme fonction plus son saut en x_0 , multipliant $\delta(x - x_0)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ f \} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + (f(x_0+0) - f(x_0-0)) \delta(x - x_0) \quad (\text{B.-6})$$

Ainsi les conditions de raccord entre les parties gauche et droite sont les suivantes :

- La fonction ψ est continue

$$\psi(0-) = \psi(0+) = \psi(0) \quad (\text{B.-7a})$$

- La dérivée de ψ a un saut proportionnel à $\psi(0)$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{0+} - \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{0-} = -\lambda \psi(0) \quad (\text{B.-7b})$$

Cherchons alors la solution de diffusion correspondant à une onde incidente plane se propageant de gauche à droite.

Faisons

$$\psi^{(r)}(r) = \begin{cases} \psi_g(r) & r \leq 0 \\ \psi_d(r) & r > 0 \end{cases} \quad (\text{B-8})$$

A gauche ($r < 0$) la solution est une superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, tandis qu'à droite il n'y a que l'onde transmise. On aura:

$$\begin{aligned} \psi_g(r) &= e^{ikr} + \rho e^{-ikr} \\ \psi_d(r) &= \tau e^{ikr} \end{aligned} \quad (\text{B.-9})$$

Les conditions de raccord donnent:

$$1 + \rho = \tau \quad (\text{B.-10a})$$

$$ik(\tau + \rho - 1) = \lambda i \quad (\text{B.-10b})$$

On obtient:

$$\tau = \frac{k}{k - i \frac{\lambda}{2}}, \quad \rho = \frac{i \frac{\lambda}{2}}{k - i \frac{\lambda}{2}} \quad (\text{B.-11})$$

Il est facile de se convaincre que l'on obtient le même résultat pour γ et ϱ si l'on part d'une onde incidente se propageant de droite à gauche. On peut donc écrire la solution générale sous la forme

$$\psi_p^{(n)}(r) = \begin{cases} e^{i\epsilon kr} + \frac{i\frac{\lambda}{2}}{k - i\frac{\lambda}{2}} e^{-i\epsilon kr} & \epsilon r < 0 \\ \frac{k}{k - i\frac{\lambda}{2}} e^{i\epsilon kr} & \epsilon r > 0 \end{cases} \quad (\text{B.}-12)$$

où $p = \epsilon k$, $k = \sqrt{E}$.

Dans la base gauche - droite, utilisée jusqu'ici, la matrice S s'écrit:

$$S'(k) = \begin{pmatrix} \frac{k}{k - i\frac{\lambda}{2}} & \frac{i\frac{\lambda}{2}}{k - i\frac{\lambda}{2}} \\ \frac{i\frac{\lambda}{2}}{k - i\frac{\lambda}{2}} & \frac{k}{k - i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.}-13)$$

Elle est diagonale dans la base des états de parité définie, $\{\cos kr, \sin kr\}$:

$$S(k) = U S'(k) U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k + i\frac{\lambda}{2}}{k - i\frac{\lambda}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.}-14)$$

avec

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

Ainsi les ondes impaires n'interagissent pas, ce qui se comprend aisément si l'on se souvient que l'interaction se traduit par un saut de la dérivée de la fonction d'onde proportionnel à sa valeur à l'origine, valeur toujours nulle pour une onde impaire. En introduisant les déphasages, on obtient:

$$S(k) = \begin{pmatrix} e^{2i\delta_0} & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_1} \end{pmatrix} \quad (B.-15)$$

$$\delta_0 = \text{Arc tg } \frac{\gamma}{2k} \quad (B.-16)$$

$$\delta_1 = 0$$

La figure B.1 donne l'allure des déphasages en fonction du rapport $E/\frac{\lambda^2}{4}$.

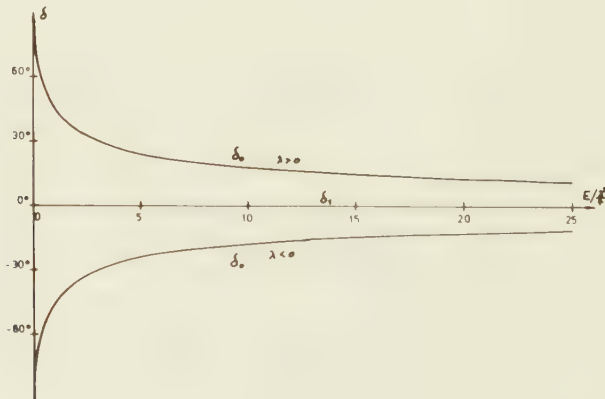


Fig. B.1 Allure des déphasages en fonction de $E/\frac{\lambda^2}{4}$

La structure analytique de $S(k)$ montre qu'il y a un état lié pour $\lambda > 0$ (anti-lié pour $\lambda < 0$) d'énergie

$$E_L = - \frac{\lambda^2}{4}$$

La fonction d'onde de cet état lié est:

$$\psi_L(r) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}|r|} \quad (B.-17)$$

Appendice C

Rappel de théorie de la diffusion

Ce bref rappel de théorie de la diffusion est avant tout destiné à fixer les idées et les notations; il n'a pas la prétention d'être rigoureux, ni celle d'être complet. Pour un exposé complet de la théorie nous renvoyons au livre de Newton [New 66].

Soit H l'hamiltonien décrivant le système considéré. On suppose que H peut se séparer en une partie libre H_0 et une partie d'interaction H' :

$$H = H_0 + H' \quad (C.-1)$$

Il y a essentiellement deux manières d'aborder la théorie de la diffusion. Dans la première, dite théorie dépendante du temps, les états et les opérateurs dépendent explicitement du temps, tandis que dans la seconde, la théorie indépendante du temps, les états et les opérateurs dépendent de l'énergie. Le passage d'un formalisme à l'autre se fait par la transformation de Fourier

$$g(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{iEt} f(t)$$

L'intégrale ci-dessus étant régularisée de façon adéquate. En dehors de quelques remarques sur la caractérisation des états, nous utiliserons ici le formalisme indépendant du temps, qui se prête plus directement aux applications.

Le problème de la diffusion se définit ainsi:

Etant donné un faisceau incident, préparé en dehors de la zone d'interaction et décrit par un état propre ψ_{in} de l'hamiltonien libre H_0 , chercher l'amplitude de probabilité de trouver un état propre ψ_{out} de H_0 après que le système ait diffusé.

Pour cela on définit les fonctions de Green retardées

$$G_0^+(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E + i\epsilon - H_0)^{-1} \quad (C.-2a)$$

$$G^+(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E + i\epsilon - H)^{-1}$$

et avancées

$$G_0^-(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E - i\epsilon - H_0)^{-1} \quad (C.-2b)$$

$$G^-(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E - i\epsilon - H)^{-1}$$

Dans le formalisme dépendant du temps on a les propriétés

$$G_0^+(t) = G^+(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

$$G_0^-(t) = G^-(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

Les fonctions de Green G satisfont l'équation de Lippmann-Schwinger

$$\begin{aligned} G^\pm(E) &= G_0^\pm(E) + G^\pm(E) H' G_0^\pm(E) \\ &= G_0^\pm(E) + G_0^\pm(E) H' G^\pm(E) \end{aligned} \quad (C.-3)$$

On définit deux types d'état de diffusion: $\Psi^{(+)}$ et $\Psi^{(-)}$. Ces états satisfont l'équation de Lippmann - Schwinger

$$\begin{aligned}\Psi^{(+)}(E, \alpha) &= \Psi_0(E, \alpha) + G_0^+(E) H' \Psi^{(+)}(E, \alpha) \\ &= \Psi_0(E, \alpha) + G^+(E) H' \Psi_0(E, \alpha)\end{aligned}\quad (C.-4a)$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(-)}(E, \alpha) &= \Psi_0(E, \alpha) + G_0^-(E) H' \Psi^{(-)}(E, \alpha) \\ &= \Psi_0(E, \alpha) + G^-(E) H' \Psi_0(E, \alpha)\end{aligned}\quad (C.-4b)$$

$\Psi_0(E, \alpha)$ est un état propre de l'hamiltonien libre H_0 caractérisé par la valeur propre α d'un certain opérateur A qui commute avec H_0 . La caractérisation de $\Psi^{(+)}$ est beaucoup plus claire dans la théorie dépendante du temps que dans celle que nous avons adoptée ici, c'est pourquoi nous nous permettrons, pendant quelques instants, de parler en termes de passé et de futur.

$\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ est la solution exacte du problème, qui dans le passé lointain était égale à la solution libre $\Psi_0(\alpha, t)$, tandis que $\Psi^{(-)}(\alpha, t)$ est la solution exacte du problème, qui dans le futur lointain sera égale à la solution libre $\Psi_0(\alpha, t)$.

Ainsi $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$ décrit le cas où l'on a préparé un état incident, bien déterminé, tandis que $\Psi^{(-)}(E, \alpha)$ décrit le cas où l'état sortant Ψ_{out} est "contrôlé".

De (C.-4a) on tire:

$$\begin{aligned}\Psi^{(+)}(E, \alpha) &= \left(1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{E + i\varepsilon - H} H' \right) \Psi_0(E, \alpha) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{E + i\varepsilon - H} (E + i\varepsilon - H + H') \Psi_0(E, \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{i\varepsilon}{E_0 + i\varepsilon - H} \psi_0(E, \alpha) \\
 &= \Omega^{(+)} \psi_0(E, \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{C.-5a}$$

où l'opérateur de Møller $\Omega^{(+)}$ est défini par

$$\Omega^{(+)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{i\varepsilon}{H_0 + i\varepsilon - H}
 \tag{C.-6a}$$

On trouve de même:

$$\psi^{(-)}(E, \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{-i\varepsilon}{E - i\varepsilon - H} \psi_0(E, \alpha) = \Omega^{(-)} \psi_0(E, \alpha)
 \tag{C.-5b}$$

$$\text{et} \quad \Omega^{(-)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{-i\varepsilon}{H_0 - i\varepsilon - H}
 \tag{C.-6b}$$

On peut montrer que les opérateurs de Møller sont isométriques. En effet, calculons en utilisant (C.-4a):

$$\begin{aligned}
 &(\psi^{(+)}(E_\beta, \beta), \psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) = \\
 &= (\psi_0(E_\beta, \beta), \psi_0(E_\alpha, \alpha)) + \left(\frac{1}{E_\beta + i\varepsilon - H} H' \psi_0(E_\beta, \beta), \psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha) \right) \\
 &= (\psi_0(E_\beta, \beta), \psi_0(E_\alpha, \alpha)) + \left(\psi_0(E_\beta, \beta), \frac{1}{E_\alpha + i\varepsilon - H} H' \psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha) \right) \\
 &\quad + \left(\psi_0(E_\beta, \beta), H' \frac{1}{E_\alpha - i\varepsilon - H} \psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\psi_0(E_\beta, \beta), \psi_0(E_\alpha, \alpha)) + (H' \frac{1}{E_\alpha + i\epsilon - E_\beta} \psi_0(E_\beta, \beta), \psi^{(1)}(E_\alpha, \alpha)) \\
 &\quad + (\psi_0(E_\beta, \beta), H' \frac{1}{E_\beta + i\epsilon - E_\alpha} \psi^{(1)}(E_\alpha, \alpha)) \\
 &= (\psi_0(E_\beta, \beta), \psi_0(E_\alpha, \alpha)) + \frac{1}{E_\alpha + i\epsilon - E_\beta} (\psi_0(E_\beta, \beta), H' \psi^{(1)}(E_\alpha, \alpha)) \\
 &\quad + \frac{1}{E_\beta + i\epsilon - E_\alpha} (\psi_0(E_\beta, \beta), H' \psi^{(1)}(E_\alpha, \alpha))
 \end{aligned}$$

Et finalement

$$(\psi^{(1)}(E_\beta, \beta), \psi^{(1)}(E_\alpha, \alpha)) = (\psi_0(E_\beta, \beta), \psi_0(E_\alpha, \alpha)) \quad (C.-7)$$

Il en est évidemment de même pour $\psi^{(-)}$ et on a bien

$$\Omega^{(+)\dagger} \Omega^{(+)} = 1 \quad (C.-8)$$

Les fonctions d'ondes $\psi^{(+)}$ et ψ_0 satisfaisant les équations de Schrödinger $H\psi^{(+)} = E\psi^{(+)}$ et $H_0\psi_0 = E\psi_0$ on a

$$H \Omega^{(+)} \psi_0 = \Omega^{(+)} H_0 \psi_0 \quad (C.-9)$$

Les états ψ_0 étant supposés former un ensemble total, on en déduit

$$H \Omega^{(+)} = \Omega^{(+)} H_0 \quad (C.-10)$$

L'opérateur de diffusion S .

La réponse à la question fondamentale de la diffusion est donnée par les amplitudes $(\Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha))$. Or

$$\begin{aligned} (\Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) &= (\Omega^{(-)} \Psi_0(E_\beta, \beta), \Omega^{(+)} \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) \\ &= (\Psi_0(E_\beta, \beta), \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) \quad (C.-11) \\ &= (\Psi_0(E_\beta, \beta), S \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) \end{aligned}$$

Ainsi le problème revient à trouver les éléments de matrice, dans la base des états libres, Ψ_0 , de l'opérateur de diffusion

$$S = \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} \quad (C.-12)$$

S est unitaire. En effet, en vertu de la totalité des états propres de H_0 , on peut écrire

$$\begin{aligned} \Omega^{(+)} \Omega^{(+)\dagger} &= \Omega^{(+)} \int_0^\infty dE \sum_\alpha \Psi_0(E_\alpha, \alpha) \Psi_0^\dagger(E_\alpha, \alpha) \Omega^{(+)\dagger} \\ &= \int_0^\infty dE \sum_\alpha \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha) \Psi^{(+)\dagger}(E_\alpha, \alpha) \quad (C.-13) \\ &= \mathbb{1} - \mathbb{A} \end{aligned}$$

où $\mathbb{A} = \sum_n \Psi_{bd}^{(n)} \Psi_{bd}^{(n)\dagger}$ est le projecteur sur le sous-espace engendré par les états liés de H . Or de (C.-10) on tire

$$H_0 \Omega^{(+)\dagger} = \Omega^{(+)\dagger} H$$

et $H_0 \Omega^{(+)} \psi(E, \alpha) = E \Omega^{(+)} \psi(E, \alpha)$

ce qui entraine que si E est dans le spectre de H , mais pas dans celui de H_0 , on a

$$\Omega^{(+)} \psi(E, \alpha) = 0$$

et donc

$$\Omega^{(+)} \wedge = 0 \quad (C.-14)$$

Calculons alors:

$$\begin{aligned} S^+ S &= \Omega^{(+)} \Omega^{(-)} \Omega^{(+)} \Omega^{(+)} = \Omega^{(+)} (I - A) \Omega^{(+)} \\ &= \Omega^{(+)} \Omega^{(+)} = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S S^+ &= \Omega^{(-)} \Omega^{(+)} \Omega^{(+)} \Omega^{(-)} = \Omega^{(-)} (I - A) \Omega^{(-)} \\ &= \Omega^{(-)} \Omega^{(-)} = I \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\Omega^{(-)} \Omega^{(+)} H_0 = \Omega^{(-)} H \Omega^{(+)} = H_0 \Omega^{(-)} \Omega^{(+)}$$

c'est - à - dire

$$[S, H_0] = 0 \quad (C.-15)$$

Puisque S commute avec H_0 , les éléments de matrice (C.-11) sont multiples de $\delta(E_\alpha - E_\beta)$. D'autre part, puisque $S = \mathbb{I}$ lorsqu'il n'y a pas de diffusion, c'est - à - dire lorsque $H = H_0$, on est conduit à poser:

$$(\Psi_0(E_\beta, \beta), S \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) = (\Psi_0(E_\beta, \beta), \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T_{\beta\alpha}(E_\alpha) \quad (C.-16)$$

De (C.-4) on tire

$$\Psi^{(+)}(E, \alpha) - \Psi^{(-)}(E, \beta) = 2\pi i \delta(E - H) H' \Psi_0(E, \alpha) \quad (C.-17)$$

En introduisant ce résultat dans (C.-11), on obtient:

$$\begin{aligned} (\Psi_0(E_\beta, \beta), S \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) &= (\Psi^{(+)}(E_\beta, \beta) - \Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) \\ &= (\Psi^{(+)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) (\Psi_0(E_\beta, \beta), H' \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) \end{aligned}$$

En vertu de l'isométrie des opérateurs de Møller, il vient, par comparaison avec (C.-16)

$$T_{\beta\alpha}(E) = (\Psi_0(E, \beta), H' \Psi^{(+)}(E, \alpha)) \quad (C.-18a)$$

On obtient de même

$$T_{\beta\alpha}(E) = (\Psi^{(-)}(E, \beta), H' \Psi_0(E, \alpha)) \quad (C.-18b)$$

En introduisant (C.-4) dans (C.-18) il vient:

$$T_{\beta\alpha}(E) = (\Psi_0(E, \beta), [H' + H' G^+(E) H'] \Psi_0(E, \alpha)) \quad (C.-19)$$

Ainsi $T_{\beta\alpha}(E)$ est l'élément de matrice, dans la base des états libres, de l'opérateur

$$T(E) = H' + H' G^+(E) H' \quad (C.-20)$$

En utilisant les équations de Lippmann-Schwinger (C.-3) pour G^+ , on obtient

$$\begin{aligned} T(E) &= H' + T(E) G_0^+(E) H' \\ &= H' + H' G_0^+(E) T(E) \end{aligned} \quad (C.-21)$$

Au lieu des éléments de matrice $T_{\beta\alpha}(E)$ (C.-19) on peut définir des extensions hors couche d'énergie de T

$$T_{\beta\alpha}^{(+)}(E_\beta, E_\alpha) = (\Psi_0(E_\beta, \beta), T(E_\alpha) \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) \quad (C.-22)$$

$$T_{\beta\alpha}^{(-)}(E_\beta, E_\alpha) = (\Psi_0(E_\beta, \beta), T(E_\alpha) \Psi_1(E_\alpha, \alpha))$$

ou encore

$$T_{\beta\alpha}(E_{\beta}, E_{\alpha}; E) = (\Psi_0(E_{\beta}, \beta), T(E) \Psi_0(E_{\alpha}, \alpha)) \quad (C.-23)$$

Pour ces extensions hors couche d'énergie l'équation de Lippmann-Schwinger (C.-21) donne lieu à des équations intégrales, ce qui n'est pas le cas pour la matrice $T_{\beta\alpha}(E)$ sur la couche d'énergie.

$T_{\beta\alpha}(E)$ est obtenu en posant $E = E_{\alpha} = E_{\beta}$ dans les extensions (C.-22) après calcul.

Application au problème de l'appendice B.

Plaçons nous dans le centre de masse et dans les coordonnées définies par (B.-2). Soient $\Psi_0(k^2, \varepsilon) = \Psi_{0p}$, avec $p = \varepsilon k$, les états propres de l'hamiltonien libre H_0 . On fixe la norme à

$$(\Psi_{0p}, \Psi_{0p'}) = \delta(p - p') = \delta(k - k') \delta_{\varepsilon, \varepsilon'}. \quad (C.-24)$$

En terme de fonctions d'ondes on a:

$$\Psi_{0p}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip \cdot r} ; \quad \Psi_{0p}(p') = \delta(p - p') \quad (C.-25)$$

$$\text{Soit} \quad t(p, p'; E) = (\Psi_{0p}, T(E) \Psi_{0p'}) \quad (C.-26)$$

On a

$$(\Psi_{0p}, H' \Psi_{0p'}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ip \cdot r} H' e^{ip' \cdot r}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-i p r} \delta(r) e^{i p' r} = -\frac{\lambda}{2\pi} \quad (C.-27)$$

En utilisant le fait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d p \psi_p \psi_{p'}^{\dagger} = 1 \quad (C.-28)$$

l'équation de Lippmann - Schwinger pour $T(E)$ (C.-21) donne

l'équation intégrale

$$\begin{aligned} t(p, p'; E) &= -\frac{\lambda}{2\pi} + \int_{-\infty}^{\infty} d p'' d p''' t(p, p'', E) (\psi_{p''}, G_0^+(E) \psi_{p'''}) (\psi_{p'''}, H' \psi_{p'}) \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d p'' \frac{t(p, p''; E)}{E + i\varepsilon - p'^2} \end{aligned} \quad (C.-29)$$

On essaye la forme suivante pour t :

$$t(p, p'; E) = \gamma(E) \quad (C.-30)$$

L'équation intégrale ci-dessus devient alors :

$$\gamma(E) = -\frac{\lambda}{2\pi} - \frac{\lambda}{2\pi} \gamma(E) \int_{-\infty}^{\infty} d p \frac{1}{E + i\varepsilon - p^2} \quad (C.-31)$$

Or on a
$$\int_{-\infty}^{\infty} d\rho \frac{1}{E+i\varepsilon-\rho^2} = -\pi i \frac{1}{\sqrt{E'}}$$

et finalement

$$t(P, P'; E) = \gamma(E) = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} - i\frac{\lambda}{2}} \quad (C.-32)$$

La valeur limite de t sur la couche d'énergie est

$$t(\varepsilon k, \varepsilon' k'; k^2) = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{k}{k - i\frac{\lambda}{2}} \quad (C.-33)$$

Il faut remarquer que la matrice t pour ce problème ne dépend que de la grandeur de l'impulsion et non de sa direction. Ce phénomène est à rapprocher de l'isotropie de la diffusion, à trois dimensions, par un diffuseur de très petite dimension.

En introduisant la solution obtenue pour t dans l'équation (C.-16), on obtient la forme suivante pour la matrice S :

$$\begin{aligned} (\psi_{\varepsilon\rho}, S \psi_{\varepsilon\rho'}) &= (\psi_{\varepsilon\rho}, \psi_{\varepsilon\rho'}) - 2\pi i \delta(\rho^2 - \rho'^2) t(P, P'; k^2) \\ &= \delta(\rho - \rho') - 2\pi i \frac{1}{2k} [\delta(\rho - \rho') + \delta(\rho + \rho')] \gamma(k^2) \\ &= \delta(k - k') \left[\delta_{\varepsilon\varepsilon'} + (\delta_{\varepsilon\varepsilon'} + \delta_{\varepsilon, -\varepsilon}) \frac{i\frac{\lambda}{2}}{k - i\frac{\lambda}{2}} \right] \end{aligned} \quad (C.-34)$$

En écrivant le terme entre crochets sous forme matricielle,

$$(\psi_{\varepsilon\rho}, S \psi_{\varepsilon\rho'}) = \delta(k - k') \begin{pmatrix} \frac{k}{k - i\frac{\lambda}{2}} & \frac{i\frac{\lambda}{2}}{k - i\frac{\lambda}{2}} \\ \frac{i\frac{\lambda}{2}}{k - i\frac{\lambda}{2}} & \frac{k}{k - i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \quad (C.-35)$$

on reconnaît bien la forme de $S(k)$ obtenue dans l'appendice B.

Bibliographie.

- [Dod 70] L.R. Dodd : J. Math. Phys. 11 (1970) 207
- [Fad 61a] L.D. Faddeev : Sov. Phys. JETP 12 (1961) 1014
- [Fad 61b] L.D. Faddeev : Sov. Phys. Doklady 6 (1961) 384
- [Fad 63] L.D. Faddeev : Sov. Phys. Doklady 7 (1963) 600
- [Gre 65] O.W. Greenberg and A.M.L. Messiah
: Phys. Rev. 138 (1965) B1155
- [Lue 68] A.W. Luehrmann : Advances in Physics 65 (1968) 1
- [McG 64] J.B. McGuire : J. Math. Phys. 5 (1964) 622
- [McG 72] J.B. McGuire and C.A. Hurst
: J. Math. Phys. 13 (1972) 1595
- [New 66] R.G. Newton : Scattering Theory of Waves and
Particles (1966)
McGraw-Hill Book Company, New York
- [Wei 64] S. Weinberg : Phys. Rev. 133 (1964) B232

